Министерство высшего и среднего специального образования СССР

Редколлегия журнала «Известия высших учебных заведений» раздел «Геология и разведка»

№ 1047-82 Деп УДК 550.837:518

Юдин М.Н.

ПРИМЕНЕНИЕ АЛЬТЕРНИРУЮЩЕГО МЕТОДА ШВАРЦА ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ГЕОЭЛЕКТРИКИ

Москва – 1982

На современном уровне развития вычислительных средств заслуживает внимания метод решения краевых задач, предложенный Шварцем в шестидесятых годах прошлого столетия при решении задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Л.В.Канторович и В.И.Крылов в работе [2] показали, что он с успехом может быть применен для существенно более широкого класса задач, связанных с решением дифференциальных и интегральных уравнений.

В геоэлектрике метод Шварца может быть применен, главным образом, в двух связанных между собой основных аспектах:

1. По известным решениям для сравнительно простых областей, получать на основе их комбинации решения для областей существенно более сложно построенных.
2. Комбинировать решения задач различными методами на областях с непустым пересечением, используя в каждой из них метод, наиболее эффективный для. данного вида области.

На первом пути можно получить, например, решение дву-мерной задачи для геофизического профиля, вообще говоря, сколь угодно большой протяженности, что особенно важно для интерпретации результатов профильных электроразведочных работ. Кроме того, менее ограничительным становится предположение о локальном характере двух- или трехмерной неоднородности, существенным образом использующееся при численном решении внутренних краевых задач геоэлектрики.

Другой путь использования метода Шварца состоит в согласовании решений внутренних краевых задач, полученных посредством таких универсальных методов как метод сеток или конечных элементов, и решений внешних краевых задач спектральными методами или

This document was created using SOLID CONVERTER PDF To remove this message, purchase the product at www.SolidPDF.com

методом интегральных уравнений, а в некоторых простых случаях и аналитическими решениями.

В работе [2] доказана сходимость метода Шварца применительно к задаче Дирихле для уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=k^2 u, \qquad k^2\geq 0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) соответствует случаю E-поляризации, если применить к уравнениям Максвелла преобразование Лапласа-Карсона по времени и затем рассматривать функцию u на положительной вещественной полуоси комплексной плоскости (в плоскости комплексной частоты). Что же касается наиболее важного в практическом отношении комплексного волнового числа, порождающего комплексные компоненты вектор-функции, то использовать непосредственно результаты Д.В.Канторовича и В.И.Крылова нельзя.

Можно показать сходимость этого метода для уравнения

$$\Delta u=k^2 u, \qquad k^2\geq 0 \qquad (2)$$

с краевыми условиями первого рода в трехмерной области $\Omega\subset R^3$. С этой целью решение уравнения (2) в шаре $T\subset\Omega$ радиуса R представляется в виде суммы двух функций

$$\mathbf{u}=\mathbf{v}+\mathbf{w}$$

Функция $\mathbf{v}$ есть решение задачи

$$\begin{cases}\Delta\mathbf{v}=0\\ \mathbf{v}\big|_{\Gamma(T)}=\mathbf{u}\end{cases}, \qquad (3)$$

а $\mathbf{w}$ - решение задачи

$$\begin{cases}\Delta\mathbf{w}=k^2\mathbf{u}\\ \mathbf{w}\big|_{\Gamma(T)}=0\end{cases}. \qquad (4)$$

Введем сферические координаты с центром в точке $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ и полярной осью, параллельной оси x. Для произвольной точки $M\left(x,y,z\right)$шара получим:

$$x=x_0+\rho_0\sin\theta_0\cos\varphi_0,\; y=y_0+\rho_0\sin\theta_0\sin\varphi_0,\; z=z_0+\rho_0\cos\theta_0.$$

Функция $\mathbf{v}$ в шаре выражается посредством интеграла Пуассона

$$\mathbf{v}\left(x,y,z\right)=\frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathbf{u}\frac{\left(R^2-\rho_0^2\right)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi}{\left[R^2-2R\rho_0\cos\lambda+\rho_0^2\right]^{3/2}},$$

где

$$\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0\cos\left(\varphi-\varphi_0\right),$$

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}\left(x_0+R\sin\theta\cos\varphi,\, y_0+R\sin\theta\sin\varphi,\, z_0+R\cos\theta\right).$$

Решение задачи (2) записывается через функцию Грина для шара

$$\mathbf{w}\left(x,y,z\right)=-\iiint_T G(M,P)k^2(P)\mathbf{u}(P)d\tau_P,$$

где

$$G(M,P)=\frac{1}{4\pi R_{MP}}-\frac{1}{4\pi R^*_{MP}}\frac{R_{MP}}{\rho},$$

ρ - расстояние от точки P до центра сферы, R_{MP} - расстояние между точками M и P, R^*_{MP} - расстояние между точкой M^*, сопряженной с М относительно сферы, и точкой P.

Таким образом, функция $\mathbf{u}\left(x,y,z\right)$ в шаре удовлетворяет интегральному уравнению

This document was created using SOLID CONVERTER PDF. To remove this message, purchase the product at www.SolidPDF.com

$$\mathbf{v}\left(x,y,z\right)=\frac{R}{4\pi}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\mathbf{u}\cdot\left(R^{2}-\rho_{0}^{2}\right)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{\left[R^{2}-2R\rho_{0}\cos\lambda+\rho_{0}^{2}\right]^{3/2}}-$$
$$-\iiint_{T}G\left(M,P\right)\cdot k^{2}\mathbf{u}\; d\tau_{P}, \qquad (5)$$

которое остается без изменения и для комплексных значений волнового числа.

На основе соотношения (5), следуя [2], доказывается сходимость метода Шварца для уравнения (2) с вещественным волновым числом. В случае комплексных значений k сходимость метода не гарантируется.

Не претендуя на строгость, покажем сходимость метода Шварца в случае комплексных волновых чисел при ограничительных предположениях.

Пусть локальная трехмерная неоднородность расположена при $z > \bar{z}$. В области $z < \bar{z}$ модель геоэлектрического разреза представляет собой горизонтально-однородную слоистую среду. Рассмотрим две области

$$\Omega_1 = \left\{\left(x,y,z\right) \mid z < \bar{z}\right\}$$

и

$$\Omega_2 = \left\{\left(x,y,z\right) \mid z > \bar{z}-h, h>0\right\}.$$

Будем считать, что вектор $\mathbf{F}$ соответствует вектору $\mathbf{E}^a$ или $\mathbf{E}^a$, а компоненты всех рассматриваемых векторов удовлетворяют условию излучения.

В каждом j-том пласте в Ω_1, не содержащем источников, вектор $\mathbf{F}_{1j}$ является решением задачи

$$\Delta\mathbf{F}_{1j} = k_j^2\mathbf{F}_{1j},\ 0 \le j \le m,$$
$$\mathbf{F}_{1j}\Big|_{z=\bar{z}} = \vec{\varphi}(x,y). \qquad (6)$$

На границах раздела свойств выполняются условия сопряжения для компонент $\mathbf{F}_{1j}$.

Пусть в области Ω_2 вектор $\mathbf{F}_{2j}$ есть решение задачи:

$$\begin{cases} L\mathbf{F}_2 = \mathbf{f}, \\ \mathbf{F}_2\Big|_{z=\bar{z}-h} = \vec{\psi}(x,y), \end{cases} \qquad (7)$$

где

$$L := rot\frac{1}{\mu}rot + \frac{k^2}{\mu}$$

или

$$L := rot\frac{1}{\hat{\sigma}}rot + \frac{k^2}{\sigma},$$
$$\hat{\sigma} = \sigma - i\omega\varepsilon,\ k^2 = -i\omega\mu\hat{\sigma}.$$

Функции $\vec{\varphi}$ и $\boldsymbol{\psi}$ согласованы между собой таким образом, что на пересечении $\Omega_1 \bigcap \Omega_2$ $\mathbf{F}_{1j} = \mathbf{F}_2$. Если известна одна из граничных вектор-функций (например, $\vec{\varphi}$ (x,y), то другая находится в результате решения задачи с известным краевым условием ($\boldsymbol{\psi}(x,y) = \mathbf{F}_{1j}(x,y,\bar{z})$). Знание одной из этих функций достаточно для получения решения во всем пространстве.

Предположим, что на основании априорной информации удалось оценить (угадать) приближенное значение $\tilde{\boldsymbol{\psi}}(x,y)$ функции $\boldsymbol{\psi}(x,y)$. Найдем решение задачи (7) с краевым условием $\tilde{\boldsymbol{\psi}}(x,y)$ предполагая, что с ним задача разрешима. В результате получим функцию $\tilde{\mathbf{F}}_2$ являющуюся решением задачи:

This document was created using SOLID CONVERTER PDF
To remove this message, purchase the product at www.SolidPDF.com

$$\begin{cases} L\tilde{\mathbf{F}}_2 = \mathbf{f}_2, \\ \tilde{\mathbf{F}}_2\big|_{z=\bar{z}-h} = \tilde{\vec{\psi}}(x,y), \end{cases} \qquad (8)$$

Введем обозначения:

$$\mathbf{u}_0 := \tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{F},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 := \tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{F}.$$

На основании (7) и (8) вектор $\mathbf{u}_0$ соответствует решению задачи:

$$\begin{cases} L\mathbf{u}_0 = 0, \\ \mathbf{u}_0\big|_{z=\bar{z}-h} = \vec{\varepsilon}_0, \end{cases} \qquad (9)$$

При достаточно малых h и ограниченных первых производных компонент вектора $\mathbf{u}_0$ по переменной z в точке z - h

$$\mathbf{u}_0(x,y,\bar{z}) = \vec{\varepsilon}_0(x,y) + O(\vec{\zeta}), \vec{\zeta} = (h,h,h).$$

Полагая $\vec{\varphi}(x,y) = \boldsymbol{\varepsilon}_0(x,y)$, получим функцию являющуюся решением задачи:

$$\begin{cases} \Delta\mathbf{v}_{1,i} = k_i^2\mathbf{v}_i \\ \mathbf{v}_{1,i}\big|_{z=\bar{z}} = \vec{\varepsilon}_0(x,y) \end{cases}, \qquad (10)$$

Решим ее на основе двумерного преобразования Фурье по переменным x и y. В спектральной области задача (10) примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\mathbf{V}_{1,i}}{dz^2} = \eta_i^2\mathbf{V}_{1,i}, \eta_i^2 = \alpha^2 + \beta^2 + k_i^2 \\ \mathbf{V}_{1,i}\big|_{z=\bar{z}} = \vec{\delta}_0(\alpha,\beta),\ \mathbf{V}_{1,i} \to 0, z \to -\infty \end{cases}, \qquad (11)$$

где $\mathbf{V}_{1,i}$ и $\boldsymbol{\delta}_0$ есть преобразование Фурье соответственно $\mathbf{v}_{1,i}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_0(x,y)$. Вектор-функция $\mathbf{V}_{1,i}$, удовлетворяющая (11), выражается через экспоненты. Можно показать, что при

$z = \bar{z} - h$ компоненты $V_{1i\gamma}$ решения $\mathbf{V}_{1,i}(\alpha,\beta,\bar{z}-h)$ допускают следующее представление:

$$V_{1i\gamma}(\alpha,\beta,\bar{z}-h) = \delta_{0\gamma}(\alpha,\beta)\cdot q_\gamma(\alpha,\beta,\bar{z},h), \ |q(\alpha,\beta,\bar{z},h)| < 1,$$

$\gamma = x, y, z.$

Обратное преобразование Фурье по функции $V_{1i\gamma}(\alpha,\beta,\bar{z}-h)$ позволяет найти очередное приближение $\boldsymbol{\varepsilon}_1(x,y)$ к краевому условию задачи (9). Повторное решение задач (9),(11) по изложенной схеме дает:

$$V_{2i\gamma}(\alpha,\beta,\bar{z}-h) = \delta_{0\gamma}(\alpha,\beta)\cdot q_\gamma^2(\alpha,\beta,\bar{z},h).$$

После l итераций получим:

$$V_{li\gamma}(\alpha,\beta,\bar{z}-h) = \delta_{0\gamma}(\alpha,\beta)\cdot q_\gamma^l(\alpha,\beta,\bar{z},h).$$

Переходя к пределу в последнем равенстве, будем иметь:

$$V_{i\gamma}(\alpha,\beta,\bar{z}-h) = \lim_{l\to\infty}\delta_{0\gamma}(\alpha,\beta)\cdot q_\gamma^l(\alpha,\beta,\bar{z},h) = 0.$$

Ввиду того, что $\boldsymbol{\varepsilon}(x,y)$ есть обратное преобразование Фурье функции $V_{i\gamma}(\alpha,\beta,\bar{z}-h)$, то в пределе получим:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x,y) = \lim_{l\to\infty}\boldsymbol{\varepsilon}_l(x,y) = 0$$

Таким образом, первоначальная погрешность $\boldsymbol{\varepsilon}_0(x,y)$ в задании граничных значений может быть сделана сколь угодно малой при достаточно большом количестве последовательных решений задач в областях Ω_1 и Ω_2. Приведенные рассуждения позволяют надеяться на сходимость метода Шварца для комплексных волновых чисел.

Аналогичные рассуждения можно выполнить применительно к модели среды, горизонтально-однородные слои которой расположены ниже трехмерной неоднородности.

В случае двухмерной геоэлектрической задачи в выкладках следует заменить вектор-функции на скалярные функции, а под L следует подразумевать оператор вида

This document was created using SOLID CONVERTER PDF
To remove this message, purchase the product at www.SolidPDF.com

$$L := div\left(\frac{1}{\eta} grad\right) - \frac{k^2}{\eta}, \eta = \mu, \hat{\sigma}.$$

Покажем на элементарных примерах сходимость метода Шварца.

Пример 1. Решить по методу Шварца задачу МТЗ для одного полупространства

$$\begin{cases} \frac{d^2U(z)}{dz^2} - k^2(z)U(z) = 0,\ z > 0, \\ U\big|_{z=0} = 1,\ U(z) \to 0,\ z \to \infty. \end{cases} \qquad (12)$$

Будем последовательно решать задачи на интервале (0,h)

$$\begin{cases} \frac{d^2U(z)}{dz^2} - k^2(z)U(z) = 0, \quad z > 0, \\ U\big|_{z=0} = 1,\ U\big|_{z=h} = a \end{cases} \qquad (13)$$

и $(z_1, \infty),\ z_1 < h)$

$$\begin{cases} \frac{d^2V(z)}{dz^2} - k^2(z)V(z) = 0,\ z > 0, \\ V\big|_{z=z_1} = b,\ U \to 0,\ z \to \infty. \end{cases} \qquad (14)$$

Первая из этих задач имеет решение

$$U(z) = U_1(z) = \frac{sh[k(h-z)]}{sh(kh)} + a\frac{sh(kz)}{sh(kh)}, \qquad (15)$$

а вторая

$$V(z) = be^{-k(z-z_1)}. \qquad (16)$$

Значение *a* задано произвольно. Решая задачу (13), найдем первое приближение к граничному значению задачи (14):

$$V(z)\big|_{z=z_1} = U_1(z_1).$$

На основе решения задачи (14) получим уточненное граничное значение для задачи (13) при z = h:

$$U_2(h) = U_1(z_1)e^{-k(h-z_1)}.$$

Для произвольной итерации с номером k+1 получим

$$U_{m+1}(h) = q_1 + U_m(h)q_1, \qquad (17)$$

где

$$q_1 = \frac{sh[k(h-z_1)]}{sh(kh)}e^{-k(h-z_1)}, \quad q_2 = \frac{sh(kz_1)}{sh(kh)}e^{-k(h-z_1)}.$$

Многократное использование рекуррентной формулы (17) дает:

$$U_{m+1}(h) = q_1\sum_{l=0}^{m} q_2^l + a \cdot q_2^{m+1}.$$

При $k \to \infty$ находим:

$$U(h) = \lim_{m\to\infty} U_m(h) = \frac{q_1}{1-q_2}.$$

Посредством тождественных преобразований легко показать, что

$$U(h) = e^{-kh},$$

т.е. совпадает с решением исходной задачи (12) в точке *z* = *h*. Таким образом, по методу Шварца можем получить решение задачи (12) при любом конечном начальном приближении *a* к граничному значению задачи (13). Сходимость итерационного процесса будет тем быстрее, чем меньше величина q_2 и чем ближе начальное приближение к точному граничному значению. В частности, полагая *a* = 1, z_1 = h/2 $|kh| = 1$ погрешность в решении не будет превосходить 1% после 5 итераций. Приближение z_1. к *h* приводит к возрастанию q_2 и

This document was created using SOLID CONVERTER PDF
To remove this message, purchase the product at www.SolidPDF.com

ухудшению сходимости к решению. Действительно, при $z_1 = 9h/10$ для достижения той же точности потребуется 18 итераций.

Пример 2. Решить по методу Шварца задачу МТЗ для одного полупространства

$$\begin{cases} \dfrac{d^2U(z)}{dz^2} = 0, & z > 0, \\ U\big|_{z=0} = 1, \ \dfrac{dU(z)}{dz}\Big|_{z=0} - k. \end{cases} \qquad (18)$$

Решение ее будем находить в двух пересекающихся интервалах. На интервале (-∞, z_1), будем решать задачу

$$\begin{cases} \dfrac{d^2U(z)}{dz^2} = 0, & z > 0, \\ U\big|_{z=z_1} = b, & \dfrac{dU(z)}{dz}\Big|_{z=z_1} = -k, \end{cases} \qquad (19)$$

А на интервале (-h,0), z_1>-h

$$\begin{cases} \dfrac{d^2V(z)}{dz^2} = 0, \quad z > 0, \\ V\big|_{z=0} = 1, \\ V\big|_{z=-h} = a. \end{cases} \qquad (20)$$

Решением задачи (19) является функция

$$U(z) = -k(z - z_1) + b, z \in (-\infty, z_1),$$

а задачи (20) –

$$V(z) = -\frac{a-1}{h} z + 1, z \in (-h, 0).$$

Выполняя преобразования подобно тому, как это было сделано при рассмотрении первого примера, получим

$$U_{m+1}(h) = \left(1 + \frac{z_1}{h}\right)(kh+1)\sum_{l=0}^{m}\left(-\frac{z_1}{h}\right)^l + a\left(-\frac{z_1}{h}\right)^{m+1}.$$

Откуда при $m \to \infty$ получаем точное граничное значение:

$$U(-h) = \lim_{m\to\infty} U_m(-h) = kh + 1.$$

По-прежнему, скорость сходимости итерационного процесса зависит от значения отношения $q = |z_1|/h$. Чем меньше q, тем быстрее уменьшается влияние произвольно заданного граничного значения *a* на величину $U_m(-h)$.

Первый пример дает представление о скорости сходимости итерационного процесса Шварца в проводящей среде, а второй - в изоляторе (например, в воздухе, подстилаемом однородной проводящей землей с волновым числом k).

Рассмотренные примеры дают возможность сделать важный методический вывод: чем больше перекрытие интервалов, на которых последовательно находятся решения по методу Шварца, тем быстрее сходимость итерационного процесса.

Пример 3. Приведем результаты численного эксперимента для одномерной модели среды, состоящей из трех слоев. Мощности слоев сверху вниз соответственно равны 1 км, 20 км и ∞, а сопротивления 1 омм, ∞ и 0 омм. На отрезке [0,1.1 км] по методу сеток решается магнитотеллурическая задача типа (13) при h = 1.1 км. Период колебаний был выбран 16 сек. Использовалось 23 узла сетки с равномерным шагом, равным 50 м. Двадцать шагов сетки соответствовала первому слою, а второму - 2 шага. Система разностных уравнений решалась по методу Зейделя с различными параметрами релаксации, изменяющимися от 1.0 до 1.9 с интервалом 0.1 и

This document was created using SOLID CONVERTER PDF To remove this message, purchase the product at www.SolidPDF.com

различными начальными приближениями. Во всех узлах, кроме первого, соответствующего поверхности земли, нулевое приближение выбиралось постоянным и равным *a*.

Величина *a* изменялась от 0.0 до 0.9 с шагом 0.1. Для коррекции граничного значения использовалась функция

$$V(z) = b\left(1 - \frac{z-1}{20}\right),$$

являющаяся решением задачи типа (14) в области $z > 1$ с краевыми условиями

$$V\big|_{z=1} = b, V\big|_{z=z_1} = 0.$$

Количество итераций, необходимое для получения однозначного решения, приведено в таблице.

Результаты расчетов по методу сеток с использованием алгоритма Шварца сопоставлялись с вычислениями по аналитическим рекуррентным формулам. Максимальное расхождение между ними не превышает *0.4%.*

Таблица

	Параметр релаксации									
a	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
0.0.	748	631	531	446	371	304	244	189	137	87
0.1	729	615	518	435	362	297	239	185	134	85
0.2	707	597	503	423	352	290	233	180	131	83
0.3	682	576	487	409	341	281	226	175	127	81
0.4	654	553	468	394	329	271	218	169	123	79
0.5	622	527	446	376	314	259	209	163	119	75
0.6	584	495	420	355	297	246	199	155	114	73
0.7	541	459	390	331	278	230	187	147	108	70
0.8	494	422	360	306	258	215	176	139	Ю4	69
0.9	463	396	339	289	245	206	169	135	102	69

Пример 4. Выясним условия, обеспечивающие сходимость метода Шварца при решении задача Е-поляризации. Рассмотрим три области, такие что

$$\Omega_1 = \{(y,z) \in R^2 \mid z < z_1\},$$
$$\Omega_2 = \{(y,z) \in R^2 \mid z_1 - h < z < z_2 + h, h > 0\},$$
$$\Omega_3 = \{(y,z) \in R^2 \mid z > z_2\}.$$

Областям Ω_1 и Ω_3 соответствует горизонтально-однородная среда, а Ω_2 - пласт с постоянным волновым числом k_n , содержащий локальную двухмерную неоднородность. На границе $z = z_1 - h$ области Ω_2 заданы краевые условия с начальной погрешностью $\varepsilon_0^B(y)$ а на границе $z = z_2 + h$ -с погрешностью $\varepsilon_0^H(y)$ Согласно приведенным выше рассуждениям, в этой области ошибка u_l вычисления аномальной части электрического поля E_x^a на *l*-той итерации является решением задачи типа (9):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_l}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u_l}{\partial z^2} = k^2 u_l \\ u_l\big|_{z_1 - h} = \varepsilon_{l-1}^B \\ u_l\big|_{z_2 + h} = \varepsilon_{l-1}^H, \end{cases} \qquad (21)$$

где ε_{l-1}^B и ε_{l-1}^H граничные значения, рассчитанные на итерации с номером *l-1*.

Преобразуем дифференциальное уравнение задачи (21) к виду

This document was created using SOLID CONVERTER PDF
To remove this message, purchase the product at www.SolidPDF.com

$$\frac{\partial^2 u_l}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_l}{\partial z^2}=k_n^2 u_l+\left(k^2-k_n^2\right)u_l.$$

Применяя преобразование Фурье F по переменной y к этому уравнению и функциям ε_{l-1}^B, ε_{l-1}^H в области Фурье-изображений получим задачу:

$$\begin{cases}\dfrac{d^2U_l}{dz^2}-\eta^2 U_l=\varphi_l(\alpha,z)\\ U_l\big|_{z_1-h}=\delta_{l-1}^B(\alpha)\\ U_l\big|_{z_2+h}=\delta_{l-1}^H(\alpha),\end{cases}\qquad(22)$$

где

$$U_l(\alpha,z)=F\left[u_l(y,z)\right],\ \varphi_l(\alpha,z)=F\left[\left(k^2-k_n^2\right)u_l\right],$$
$$\delta_{l-1}^B(\alpha)=F\left[\varepsilon_{l-1}^B(y)\right],\ \delta_{l-1}^B(\alpha)=F\left[\varepsilon_{l-1}^H(y)\right],$$

$\eta=\sqrt{\alpha^2+k_n^2}$, $z\in\left[z_1-h,z_2-h\right]$, α - пространственная частота.

Общее решение уравнения в задаче (22) может быть записано в виде:

$$U_l(\alpha,z)=\int_{z_1-h}^{z}G(z,\zeta)\varphi(\alpha,\zeta)d\zeta+Ae^{-\eta\bar z}+Be^{\eta\bar z},$$

где

$$G(z,\zeta)=\frac{1}{\eta}sh\left[\eta\left(z-\zeta\right)\right],\ \bar z=z-z_1+h.$$

Коэффициенты A и B находятся из краевых условий:

$$A=\frac{\delta_{l-1}^B(\alpha)e^{\eta H}-\left(\psi_l+\delta_{l-1}^H(\alpha)\right)}{2sh(\eta H)},$$
$$B=\frac{\psi_l+\delta_{l-1}^H(\alpha)-\delta_{l-1}^B(\alpha)e^{-\eta H}}{2sh(\eta H)}.$$

Здесь

$$\psi_l=-\int_{z_1-h}^{z}G(H,\zeta)\varphi(\alpha,\zeta)d\zeta,$$
$$H=z_2-z_1+2h.$$

Итак, решение задачи (22) является функция

$$U_l(\alpha,z)=\delta_{l-1}^B\frac{sh[k(H-z)]}{sh(kh)}+\left(\psi_l+\delta_{l-1}^H(\alpha)\right)\frac{sh(kz)}{sh(kh)}+$$
$$+\int_{z_1-h}^{z}G(z,\zeta)\varphi(\alpha,\zeta)d\zeta$$

Рассмотрим область $\Omega_{12}=\Omega_1\cap\Omega_2$. Здесь среда горизонтально-однородна, поэтому в интервале $\left(z_1-h,z_1\right)\ \varphi(\alpha,z)\equiv 0$. Интегральное уравнение (23) в Ω_{12} принимает вид

$$U_l(\alpha,z)=\delta_{l-1}^B q_1(z)+\left(\psi_l+\delta_{l-1}^H(\alpha)\right)q_2(z),$$

This document was created using SOLID CONVERTER PDF
To remove this message, purchase the product at www.SolidPDF.com

где

$$q_1(z) = \frac{sh[k(H-z)]}{sh(kh)},$$

$$q_2(z) = \frac{sh(kz)}{sh(kh)}.$$

Используя функцию $U_l(\alpha, z)$ в качестве краевого условия можно построить решение $V_l(\alpha, z)$ одномерной задачи типа (11) в области Ω_1 [1]. На основе этого решения продолжим поле с глубины z_1 на уровень z_1-h. При этом значения $U_l(\alpha, z)$ умножаются на коэффициент $q_3(\alpha, h)$, модуль которого при h > 0 меньше единицы:

$$V_l(\alpha, z) = U_l(\alpha, z)\, q_3(\alpha, h).$$

В частном случае, когда Ω_1 соответствует однородное полупространство, $q_3(\alpha, h) = e^{-\eta h}$, $\mathrm{Re}\eta > 0$.

Таким образом, перед l + 1-й итерацией краевое условие δ_{l-1}^B на границе z = z_1 - h области Ω_2 примет вид:

$$\delta_l^B(\alpha) = \delta_{l-1}^B(\alpha)\left[q_1 + \frac{\psi_l + \delta_{l-1}^H}{\delta_{l-1}^B} q_2\right] q_3.$$

Величина $\psi_l(\alpha)$ соответствует поправке к решению, обусловленной возбуждением неоднородности погрешностью задания краевых условий δ_{l-1}^B и δ_{l-1}^H, поэтому очевидно

$$|\psi_l(\alpha)| \le |\delta_{l-1}^B| + |\delta_{l-1}^H|$$

Таким образом достаточным условием сходимости итерационного процесса при построении краевого условия будет выполнение неравенства

$$\left[q_1 + \frac{\psi_l + \delta_{l-1}^H}{\delta_{l-1}^B} q_2\right] q_3 \le q_0 < 1.$$

Рассмотрим более простую ситуацию, когда краевое условие на нижней границе области Ω_2 задано точно, т.е. $\delta_0^H(\alpha) = 0$. В этом случае в силу линейности задачи функция $\psi_l(\alpha)$ пропорциональна величине δ_{l-1}^B с коэффициентом $t(\alpha) \le 1$:

$$\psi_l(\alpha) = t(\alpha)\delta_l^B(\alpha).$$

Тогда

$$\delta_l^B(\alpha) = \delta_l^B(\alpha) Q$$

где

$$Q = [q_1 + t(\alpha) q_2] q_3.$$

Используя выражения для q_1, q_2 и условие $|q_3| < 1$ можно показать, что в худшем случае t = 1 величина |Q| меньше единицы. Это обеспечивает сходимость итерационного процесса Шварца, т.к. $|\delta_l^B| \le q_0 |\delta_0^B|$ и

$$\lim_{l\to\infty} |\delta_l^B| \le \lim_{l\to\infty} |\delta_0^B| q_0^l = 0.$$

В заключение заметим, что в трехмерном случае рассуждения остаются без изменения, если неоднородность содержится в горизонтально однородном слое. При этом необходимо вместо одномерной использовать двумерную Фурье-трансформацию уравнения и краевых условий.

Некоторые результаты численных экспериментов приведены в работе [3].

Численные эксперименты и теоретические исследования свидетельствуют о возможности применения альтернирующего метода Шварца для построения краевых условий в процессе численного решения внутренних краевых задач геоэлектрики произвольной размерности.

This document was created using SOLID CONVERTER PDF To remove this message, purchase the product at www.SolidPDF.com

Литература.

1. Бердичевский М.Н. Жданов М.С. Интерпретация аномалий переменного электромагнитного поля. М."Недра",1981.
2. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. Гос. Изд. физ.-мат. лит. М.Л.,1962.
3. Юдин М.Н. Алгоритм итерационного построения граничных условий при численном решении геолого-геофизических задач. ЭИ. ВИЭМС. Мат. методы исслед. в геологии, вып.6,1981.

Печатается в соответствии с постановлением редколлегии журнала «Известия высших учебных заведений», раздел «Геология и разведка» от 25 декабря 1981 г. № __________

1047-82
В печать 8.01.82
Тир.1 1руб. 60 коп. Зак. 32792

Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ
Люберцы, Октябрьский пр., 403

This document was created using SOLID CONVERTER PDF
To remove this message, purchase the product at www.SolidPDF.com