

МНОГОМАСШТАБНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТРАНСФОРМАЦИИ В КОНТЕКСТЕ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ГЕОФИЗИКИ

Юдин М.Н.

Российский государственный геологоразведочный университет, Москва, Россия

Введение.

За последние 20 лет в прикладной математике был развит и оформился в самостоятельное направление раздел, получивший название «вейвлет-преобразование» (*wavelet transform*)¹. Автор этого термина Жан Морле. Свой знаменитый “вейвлет” он придумал и применил при обработке данных сейсморазведки [Goupillard at all, 1985]. Начиная с девяностых годов прошлого века, на основе идей вейвлет-преобразования сигналов начал интенсивно развиваться математический аппарат для многомасштабного анализа многомерных данных². В настоящее время преобразование данных этого класса играет фундаментальную роль в теории аппроксимации.

Вейвлеты оперируют двумя основными параметрами: *масштабом (scale)* и *положением (location)*. Двумерные вейвлеты, как правило, имеют только фиксированное количество направленных элементов (см. рис. 2). Но в реальных сигналах могут присутствовать совершенно другие направления, которые нужно подчеркнуть посредством трансформации данных. В последнее десятилетие появилось большое число публикаций, посвященных классу трансформаций многомерных данных, которые включают дополнительный параметр – ориентацию линейных сегментов. Следует отметить цикл статей E. J. Candès and D. L. Donoho³ и ряда их соавторов. Наряду с алгоритмами многомасштабного анализа сигналов, индуцированными вейвлетами, этот класс интегральных трансформаций пронизывают идеи, содержащиеся в преобразовании Радона, – математическом аппарате, лежащем в основе компьютерной томографии [Наттерер, 1990; Deans, 1983]. В отличие от вейвлетов, трансформации, о которых здесь пойдет речь, в число основных параметров включают три элемента: *масштаб (scale)*, *положение (location)* и *ориентацию (orientation)* линейных сегментов данных.

Приведем перечень основных модификаций интегральных преобразований рассматриваемого класса: *beamlet transform* (бимлет-преобразование), *curvelet transform* (курвлет-преобразование), *ridgelet transform* (риджлет-преобразование), *bandelet transform* (бендлет-преобразование). Эти и подобные им трансформация двумерных и многомерных данных обладают высокой чувствительностью и точностью при обнаружении и выделении объектов и их границ [Choi at all, 2002]. Для краткости, когда это не будет приводить к недоразумениям, будем называть все перечисленные выше и им подобные интегральные преобразования *бимлет-преобразованиями*⁴. Основные ссылки делаются на сайты в Интернете, где можно найти исчерпывающую информацию о работах по бимлет-преобразованиям.

Адаптивная фильтрация данных на основе выбора разумного порога и усечения части коэффициентов в области изображений (после применения рассматриваемых здесь дискретных интегральных преобразований) и последующего восстановления сигнала, является важной составной частью сжатия данных и/или увеличения отношения сигнал/шум. Центральное место здесь занимает выбор в некотором смысле оптимального уровня во множестве коэффициентов, который является границей между полезной информацией и наиболее вероятной помехой.

¹ www-stat.stanford.edu/~wavelab, www.mathsoft.com/wavelets.html, <http://www.wavelet.org>

² www.isye.gatech.edu/~beamlab

³ www-stat.stanford.edu/~donoho/Reports

⁴ *Beam* – луч, *beamlet* – маленький луч, лучик, штрих, отрезок

Здесь основное внимание будет уделено иллюстрации результатов работы алгоритмов на простых тестовых примерах и реальных данных геофизики (сейсморазведки и электроразведки). Автор ограничился только анализом двумерных данных.

Приложения рассматриваемого класса трансформаций содержатся в работах [Юдин и др., 2005].

1. Краткая характеристика интегральных преобразований.

Дадим краткую характеристику основных интегральных преобразований, не останавливаясь на выводах формул и доказательствах теорем. Более подробно рассмотрим элементы теории непрерывного и дискретного вейвлет-преобразований, так как другие трансформации наследуют идеи многомасштабного (multiscale) анализа данных, содержащиеся в вейвлет-анализе.

1. Вейвлет-преобразование (Wavelet Transform, WT) [Юдин и др, 2000; Чуи, 2001].

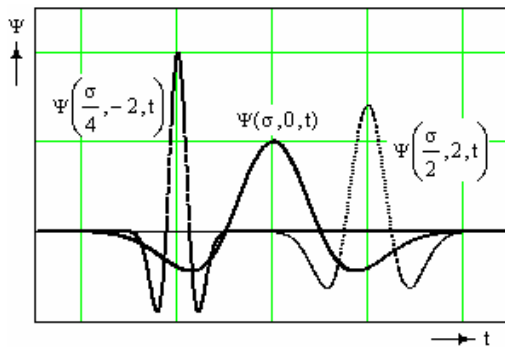
Английский термин «*wavelet*⁵» (фр. «*ondelette*») предложил Ж. Морле в связи с задачами сейсморазведки. Сфера применения вейвлет-анализа обширна, а количество публикаций по этой теме лавинообразно растет.

А. Одномерное вейвлет-преобразование (WT1D).

Непрерывное одномерное вейвлет-преобразование. Пусть фиксирована функция $\psi(t) \in L^2(R)$, имеющая нулевое интегральное среднее $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$ и достаточно быстро стремящаяся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Назовем ее вейвлетом или всплеском. На основе вейвлета $\psi(t)$ путем сдвигов и изменения масштаба построим функцию

$$\psi_{\sigma, \tau}(t) := \frac{1}{\sqrt{|\sigma|}} \psi\left(\frac{t-\tau}{\sigma}\right), \quad (2)$$

в которой $\sigma \in (0, \infty)$ – параметр масштаба, $\tau \in R$ – параметр сдвига.



Пример. Вейвлетами являются производные функции Гаусса $g(t) = \exp(-t^2/2)$:

$$\psi(t) = \frac{\partial^n g(t)}{\partial t^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

На рис. 1 приведены графики трех МНАТ-вейвлетов ($n = 2$) на различных масштабах σ и сдвигах τ во временной области:

$$\psi_1(t) = \psi_{\sigma, 0}, \quad \psi_2(t) = \psi_{\sigma/2, \tau_0}, \quad \psi_3(t) = \psi_{\sigma/4, -\tau_0}.$$

Рис. 1. Графики МНАТ-вейвлетов

Прямое непрерывное вейвлет-преобразование (CWT) есть отображение W_ψ , определяемое по формуле

$$(W_\psi f)(\sigma, \tau) \equiv \check{f}(\sigma, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{|\sigma|}} \overline{\psi\left(\frac{t-\tau}{\sigma}\right)} dt, \quad (1)$$

где черта означает операцию комплексного сопряжения.

Обратное вейвлет-преобразование (ICWT) дает интеграл



$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (W_\psi f)(\sigma, \tau) \psi_{\sigma, \tau}(t) \frac{1}{\sigma^2} d\sigma d\tau. \quad (2)$$

Здесь $0 < C_\psi := \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(\xi)|^2 / |\xi| d\xi < \infty$. Последнее соотношение называют *условием допустимости* для вейвлета $\psi(t)$. Если это условие не выполняется, то восстановление функции $f(t)$ по $\check{f}(\sigma, \tau)$, вообще говоря, невозможно.

⁵ wave-волна, wavelet- маленькая волна, всплеск

В таблице 1 сопоставляются элементы комплексного Фурье-преобразования и непрерывного вейвлет-преобразования. При выполнении преобразования Фурье для анализа данных используются синусоиды и косинусоиды различной частоты, тождественно не равные нулю на всей числовой оси. Вейвлет-преобразование анализирует данные путем сопоставления их со сжатыми или растянутыми копиями локальных импульсов (существенно отличных от нуля на весьма ограниченном интервале) на различных сдвигах по оси времен. Класс таких анализирующих вейвлет-функций может быть достаточно широким.

Таблица 1.

Преобразование	Фурье-анализ	Вейвлет- анализ
Основная функция	$\exp(it)$ 	$\psi(t)$ 
Ядро $K(\cdot)$	$K(\omega, t) = \exp(i\omega t)$	$K(\sigma, \tau, t) = \psi_{\sigma, \tau}(t)$
Прямое преобразование	$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{\exp(i\omega t)} dt$	$\check{f}(\sigma, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{\psi_{\sigma, \tau}(t)} dt$
Обратное преобразование	$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) \exp(i\omega t) dt$	$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \check{f}(\sigma, \tau) \psi_{\sigma, \tau}(t) \frac{1}{\sigma^2} d\sigma d\tau$

Дискретное вейвлет-преобразование (DWT). Непрерывное вейвлет-преобразование использует весь диапазон изменения величин σ и τ . Положим $\sigma = 2^j$ и $\tau = k2^j$, где $j, k \in \mathbf{Z}^6$, придем к ортонормированному базису (ОНБ) в пространстве $L^2(R)$ [Добеши, 2001]:

$$\psi_{j,k}(t) := 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k). \quad (3)$$

Коэффициенты Фурье сигнала $f(t)$ по системе функций (3) равны

$$\check{f}_{j,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k)} dt. \quad (1')$$

Кратно-масштабный анализ. В явном виде *кратно-масштабный (кратно-разрешающий) анализ (КРА)*, на теоретической основе которого строится быстрое дискретное вейвлет-преобразование, был сформулирован осенью 1986 года С. Малла и И. Мейером. С его помощью в 1987 году И. Добеши [Добеши, 2001] построила бесконечную серию вейвлетов, обладающих основным свойством системы Хаара – компактным носителем⁷ и, вдобавок, определяющихся более гладкими функциями.

Определение. Последовательность $\{V_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ замкнутых подпространств в $L^2(R)$ называется *кратно разрешающим анализом (КРА)*, если:

$$1. V_j \subset V_{j+1} \quad \forall j \in \mathbf{Z}, \quad 2. \bigcup_{j \in \mathbf{Z}} V_j = L^2(R), \quad 3. \bigcap_{j \in \mathbf{Z}} V_j = \{0\}, \quad 4. f(\cdot) \in V_j \Leftrightarrow f(2\cdot) \in V_{j+1}, \quad (4.1)$$

$$5. f(\cdot) \in V_0 \Leftrightarrow f(\cdot - k) \in V_0 \quad \forall k \in \mathbf{Z}, \quad 6. \exists \varphi \in V_0 : \{\varphi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbf{Z}} - \text{ОНБ в пространстве } V_0. \quad (4.2)$$

Функция φ называется *масштабирующей функцией (scaling function)* КРА. Пусть интеграл от φ по R равен 1. Свойство 4 позволяет по одному подпространству V_0 построить все семейство $\{V_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ при каждом фиксированном j . Положим

$$\varphi_{jk}(t) := 2^{-j/2} \varphi(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbf{Z}. \quad (5)$$

Из 4 и 6 следует, что при каждом фиксированном j система функций $\{\varphi_{jk}\}_{k \in \mathbf{Z}}$, – ОНБ в пространстве V_j .

⁶ Такой выбор величин σ и τ ведет к конструкции кратно разрешающего анализа.

⁷ Множество аргументов, на котором вейвлет не равен нулю, ограничено.

Вейвлеты $\psi(x)$ и подпространства W_j . Пользуясь условием 1, для любого $j \in Z$ определяем W_j как ортогональное дополнение V_j до V_{j+1} : $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$. Подпространства W_j содержат детализирующую информацию при переходе от разрешения уровня $j+1$ к j . Для данного КРА $\{V_j\}_{j \in Z}$ вейвлет-пространства $\{W_j\}_{j \in Z}$ в $L^2(R)$ определяются однозначно. Из свойств 1-3 КРА следует, что их прямая сумма совпадает со всем пространством $L^2(R)$: $\bigoplus_{j \in Z} W_j = L^2(R)$.

Теорема (без доказательства). Для всякого КРА $\{V_j\}_{j \in Z}$ в $L^2(R)$ существует такой вейвлет ψ , что система $\{\psi(\cdot - k)\}_{k \in Z}$ – ОНБ в W_0 . Более того, система функций $\{\psi_{jk}(\cdot)\} := \left\{ 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^j \cdot - k) \right\}_{j,k \in Z}$ является ОНБ в $L^2(R)$.

Б. Двумерное вейвлет-преобразование (WT2D). Двумерные вейвлеты (аналогично двумерному преобразованию Фурье) могут быть построены из одномерных вейвлетов. В простейшем случае для построения КРА и базисов в пространстве $L^2(R^n)$ используется так называемое тензорное произведение одномерной конструкции.

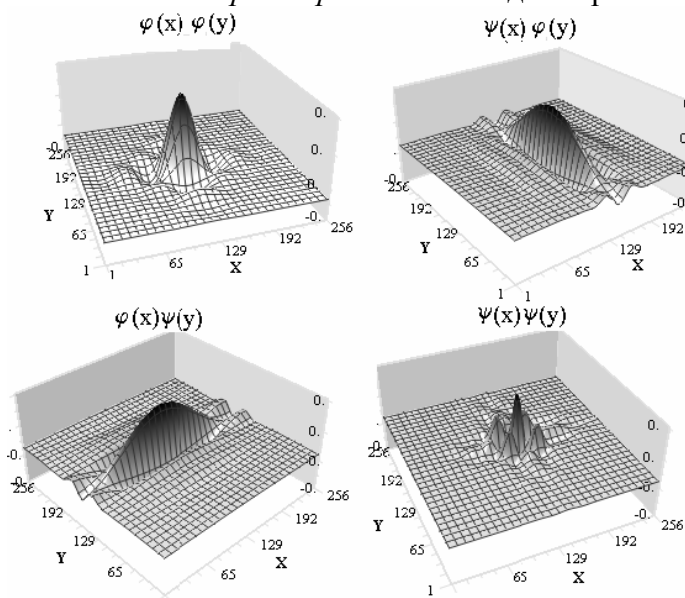


Рис. 2. Двумерная масштабирующая функция $\Phi(x, y)$ (вверху слева) и вейвлеты $\Psi^{(i)}(x, y)$.

Ограничимся двумерным случаем ($n = 2$). Предположим, что в $L^2(R)$ выбран некоторый КРА с масштабирующей функцией φ и вейвлетом ψ . Определим четыре функции двух переменных:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \varphi(x)\varphi(y), \\ \Psi^{(1)}(x, y) &= \varphi(x)\psi(y), \\ \Psi^{(2)}(x, y) &= \psi(x)\varphi(y), \\ \Psi^{(3)}(x, y) &= \psi(x)\psi(y). \end{aligned} \quad (6)$$

Получим одну масштабирующую функцию $\Phi(x, y)$ и три вейвлета $\Psi^{(i)}(x, y)$ $i = 1, 2, 3$ (рис. 2). Оказывается, что эти четыре функции генерируют кратноразрешающий анализ в $L^2(R^2)$.

Детализирующие подпространства W_j определяются как ортогональные дополнения V_j до V_{j+1} в $L^2(R^2)$. При этом оказывается, что W_0 есть прямая сумма трех подпространств, порожденных вейвлетами $\Psi^{(1)}(x, y)$, $\Psi^{(2)}(x, y)$, $\Psi^{(3)}(x, y)$, которые определены в (6).

Недостаток двумерного вейвлет-базиса состоит в том, что он состоит из изотропных элементов, расположенных на всех масштабах и местоположениях и имеющих два основных направления чувствительности, параллельные координатным осям (см. рис.2). Не все данные удобно аппроксимировать посредством такого набора базисных функций, поэтому требуются другие виды многомасштабного анализа данных.

2. Преобразование Радона (Radon Transform, RT.) [Deans, 1983]. Преобразование Радона появляется как фундаментальный инструмент во многих областях научных исследований (медицине, кристаллографии, геофизике) [Сейсмическая томография, 1990]. Следует упомянуть и применение обобщенного обратного преобразования Радона (IRT) в сейсмической миграции и в методах обращения данных рассеяния. Процедуры прямого и

обратного дискретного преобразования Радона включены в состав MATLAB (процедуры *radon*, *iradon*).

Двумерное преобразование Радона (*RT*) функции состоит в ее интегрировании вдоль прямых. Множество лучей, пересекающих модель в различных направлениях, содержит достаточно информации для восстановления этой модели. Обратное преобразование Радона представляет собой изящное математическое решение.

Непрерывное преобразование Радона (CRT). Прямое непрерывное преобразование Радона есть отображение функций $f(x, y)$, $(x, y) \in R^2$ в функции $Rf(t, \theta)$, $t \in R, \theta \in [0, \pi)$ определяемое формулой

$$Rf(t, \theta) \equiv \tilde{f}(t, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dx dy, \quad (7)$$

где δ есть функция Дирака. Другими словами, $Rf(t, \theta)$ есть интеграл от функции f по прямой $L_{t, \theta}$, определяемой уравнением $t = x \sin \theta + y \cos \theta$.

Обратное преобразование Радона дает формула [Сейсмическая томография, 1990]

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi} \tilde{f}(t, \theta) e^{2i\pi t(x \cos \theta + y \sin \theta)} d\theta |t| dt. \quad (8)$$

Имеется тесная связь между преобразованием Радона и двумерным преобразованием Фурье, устанавливаемая теоремой о центральном проектировании (*projection-slice theorem*).

Согласно этой теореме, для фиксированного угла наклона прямой $\theta = \theta_0$ функция $Rf(t, \theta_0)$ как функция одной переменной t может быть получена в результате выполнения следующих шагов.

(а) Выполнение двумерного преобразования Фурье F_2 : $\hat{f}(k_1, k_2) = F_2[f(x, y)]$.

(б) Проектирование двумерного спектра на прямую, проходящую под углом θ_0 через начало координат спектральной плоскости (k_1, k_2) : $\hat{f}_{\theta_0}(\lambda) \equiv \hat{f}(\lambda \cos \theta_0, \lambda \sin \theta_0)$, $-\infty < \lambda < \infty$ (получения радиального «среза» в спектральной области).

(в) Применение *одномерного* обратного преобразования Фурье F^{-1} к полученному срезу: $Rf(t, \theta_0) = F^{-1}[\hat{f}_{\theta_0}(\lambda)]$.

Выполняя действия в обратном направлении, можно реконструировать функцию $f(x, y)$ из $Rf(t, \theta)$.

Дискретное преобразование Радона (DRT). *DRT* основано на отмеченной выше связи *CRT* с преобразованием Фурье и реализуется посредством БПФ. [Averbuch и др., 2001]

3. Риджлет-преобразование⁸ (Ridgelet Transform, $\mathfrak{R}T$) [Donoho, 2000]. Риджлет-преобразование тесно связано с вейвлет-преобразованием и преобразованием Радона.

Риджлет-функции. Пусть функция $\psi(t) \in L^2(R)$ является вейвлетом. Для любых $\sigma > 0$, $\tau \in R$ и $\theta \in [0, 2\pi)$ определяется двумерный риджлет $\psi_{\sigma, \tau, \theta} : R^2 \rightarrow R^2$ посредством формулы

$$\psi_{\sigma, \tau, \theta}(x, y) = \sigma^{-1/2} \psi((x \cos \theta + y \sin \theta - \tau) / \sigma). \quad (9)$$

Риджлет постоянен вдоль прямых $t = x \cos \theta + y \sin \theta$, $t = const$.

Пусть дана интегрируемая функция двух переменных $f(x, y)$. Ее риджлет-преобразование определяется посредством интеграла

$$\mathfrak{R}_f(\sigma, \tau, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \psi_{\sigma, \tau, \theta}(x, y) dx dy \quad (10)$$

Справедлива точная формула реконструкции (I $\mathfrak{R}T$) (обратного преобразования)

⁸ Ridge - ребро; гребень. Название "ridgelet" было введено в 1970 году Logan и Shepp в связи с математикой, используемой в вычисленной томографии.

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{R}_f(\sigma, \tau, \theta) \psi_{\sigma, \tau, \theta}(x, y) \frac{d\sigma}{\sigma^3} d\tau \frac{d\theta}{4\pi}. \quad (11)$$

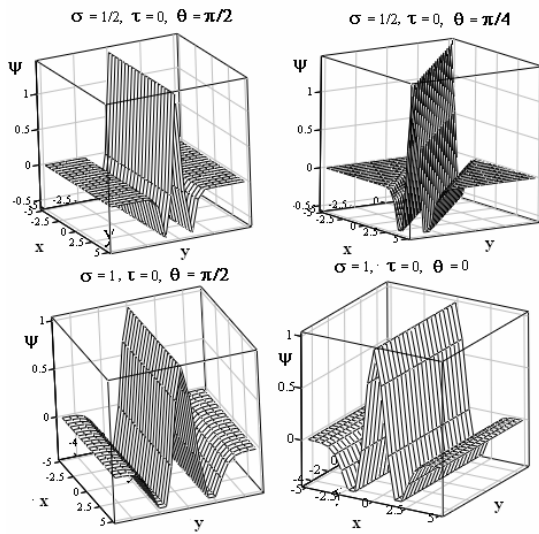


Рис. 3. Риджлеты

Графиком риджлета является цилиндрическая поверхность, направляющей линией для которой является вейвлет. Сечение этой поверхности плоскостью, перпендикулярной образующей, является вейвлетом. На рис.3 изображены графики нескольких риджлетов с различными значениями параметров. Рисунки получены после простых геометрических манипуляций над верхним левым риджлетом, а именно, вращение, изменение масштаба и смещение. В отличие от двумерных вейвлетов, риджлеты выбором величины угла θ могут непрерывно менять ось чувствительности и поэтому приспособлены к обнаружению вытянутых линейных объектов.

Риджлет-анализ можно трактовать как вейвлет-анализ в области Радона. $\mathfrak{R}T$ состоит в применении 1-D вейвлет-преобразования к «средам» преобразования Радона, на которых угловая переменная θ является постоянной, а t изменяется:

$$\mathfrak{R}_f(\sigma, \tau, \theta) = \int Rf(\theta, t) \sigma^{-1/2} \psi\left(\frac{t-\tau}{\sigma}\right) dt. \quad (12)$$

Риджлет-преобразование хорошо приспособлено к выделению линейных структур, приблизительно имеющих размер изображения. Однако, интересные линейные структуры, например, линейные элементы, могут проявляться в широком диапазоне масштабов. Можно применить классические идеи типа рекурсивного двоичного подразделения и, таким образом, создать словари оконных риджлетов, повторно нормализованных и перемещаемых в широком диапазоне масштабов и местоположений.

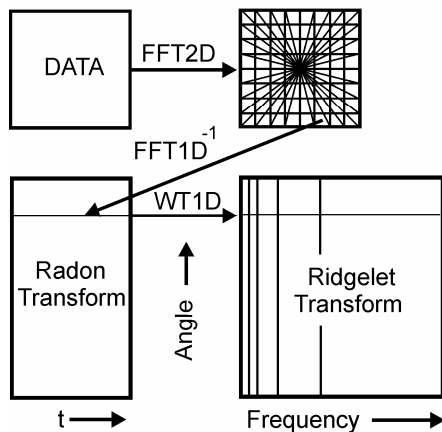


Рис. 4а. Одна из возможных схем риджлет-преобразования

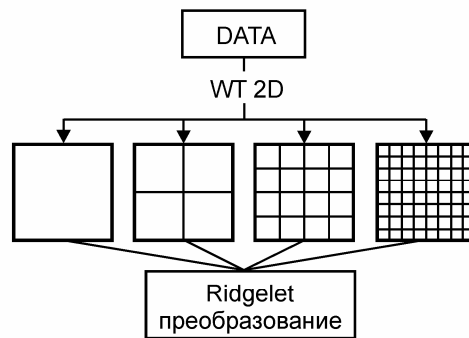


Рис. 4б. Схема курвлет-преобразования.

На рис. 4а изображена схема дискретного $\mathfrak{R}T$ ($D\mathfrak{R}T$), на которой прямое преобразование Радона выполняется посредством применения обратного одномерного

быстрого Фурье преобразования к проекциям двумерных Фурье-спектров на набор лучей, порожденных дискретизацией. *ДЖТ* цифрового массива размера $n \times n$ – преобразует в массив размера $2n \times 2n$ и, следовательно, фактор (коэффициент) избыточности равняется 4.

IV. Курвлет-преобразование⁹ (Curvelet Transform, *CT*) [Candès, Donoho, 1999]. *CT* выполняет многомасштабный анализ данных и состоит из выполнения двух шагов.

1. Двумерное дискретное вейвлет-преобразование данных (*WT 2D*).
2. На каждом фиксированном масштабе, полученном в результате применения *WT 2D*, выполняется дискретное риджлет-преобразование.

Схема этого преобразования изображена на рис. 4б.

V. Бимлет-преобразование (Beamlet Transform, *BT*) [Choi, Donoho D.L., и др., 2002]. Бимлет-преобразование реализует идею многомасштабного анализа данных (изображений), в которых линейные сегменты играют роль, аналогичную роли, которую играли точки в вейвлет-анализе.

Бимлет-структура имеет 5 ключевых компонент.

1. *Бимлет-словарь* – диадно-организованная библиотека линейных сегментов в семействе позиций, ориентаций и масштабов, которые дают многомасштабную аппроксимацию набора всех линейных сегментов.

2. *Бимлет-преобразование* образа $f(x,y)$ – набор всех интегралов по линиям изображения вдоль бимлетов из бимлет-словаря.

3. *Бимлет-пирамида* является коллекцией коэффициентов бимлет-преобразования, расположенных в структуре данных с иерархической многомасштабной природой.

4. *Бимлет-граф* имеет структуру графа, в которой вершины соответствуют угловым пикселям в основном изображении, а грани соответствуют бимлетам, объединенным в пары таких угловых пикселей. Путь через этот граф соответствует многоугольнику в оригинальном изображении.

5. *Бимлет-алгоритмы* извлекают данные из бимлет-пирамиды по пути, определенном структурой бимлет-графа (например, алгоритмы движения по сети или алгоритмы рекурсивного бинарного разделения).

Используя первые четыре компонента *бимлет-структуры*, мы можем сформулировать базирующиеся на бимлетах алгоритмы, которые способны идентифицировать и извлекать бимлеты и цепи бимлетов со специальными свойствами.

В процессе бимлет-преобразования изображение разбивается на диадическую последовательность квадратов. Для каждого такого квадрата на его сторонах отмечаются равноудаленные точки, включая вершины квадрата, и затем эти точки попарно соединяются отрезком. Полученный набор отрезков образует совокупность (коллекцию) прямых для анализа части изображения внутри этого квадрата, а их объединение для диадической последовательности всех квадратов – совокупность прямых, построенных для анализа всего изображения. В результате выполнения прямого бимлет-преобразования изображение можно представить как набор штрихов различного размера, направления и расположения (а также яркости).

II. Примеры фильтрации данных.

Программы, посредством которых был выполнен анализ данных, написаны автором на языке MatLab.

1. Тестовый пример. Алгоритмы фильтрации данных основаны на выборе порога для коэффициентов интегральных преобразований, посредством которого часть коэффициентов заменяется нулями (процедура *Thresholding*). После этого выполняется реконструкция данных посредством соответствующего обратного преобразования. Выбор оптимального порога является достаточно сложной математической задачей. По этой теме имеется ряд интересных публикаций. Она нашла удовлетворительное решение при сжатии данных и

⁹ Curve – кривая; изгиб, curvelet – маленький изгиб

борьбы с шумом посредством вейвлет-анализа. Некоторую информацию по проблеме можно найти в книгах [Дяконов, 2004; Смолегицев, 2005] и описании алгоритмов программ Wavelet Toolbox MATLAB. Этот вопрос в настоящей работе обсуждаться не будет. Важным аргументом в пользу той или иной последовательности применения различных преобразований являются результаты численных экспериментов на тестовых данных.

Мы рассмотрим задачу борьбы с шумом (denoising), основанную на идее комбинирования различных преобразований: каждое преобразование в отдельности не может дать такие результаты, как их совместное использование. Комбинированная реконструкция имеет тенденцию к освобождению от главных искажений (артефактов), которые очень велики при стандартных правилах порогового усечения значений коэффициентов.

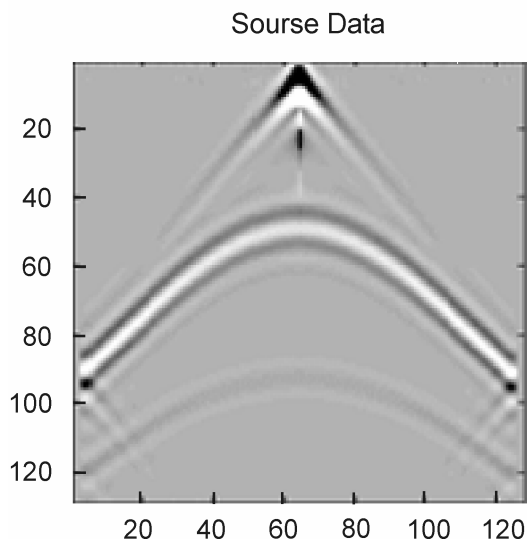


Рис. 5. Исходные данные. Фрагмент синтетической сейсмограммы

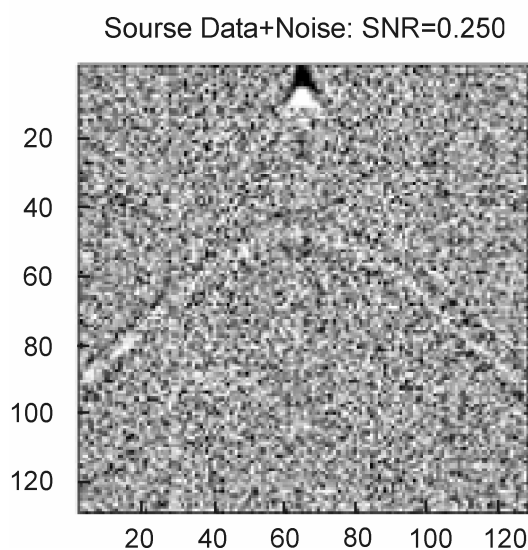


Рис. 6. Синтетическая сейсмограмма, осложненная шумом. SNR = 1/4.

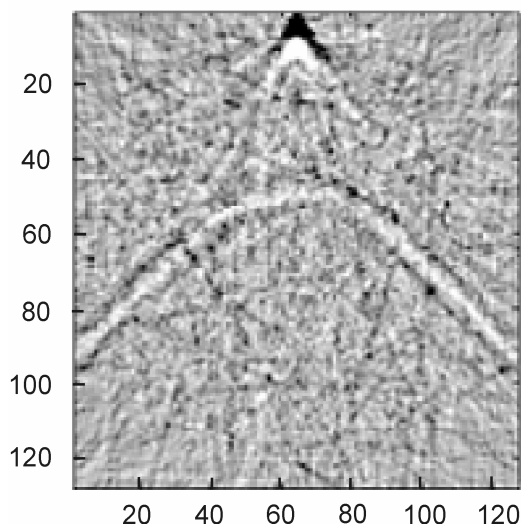


Рис. 7. Фильтрация сейсмограммы, изображенной на рис.6, только на основе преобразования Радона ($T_R=1/8$).

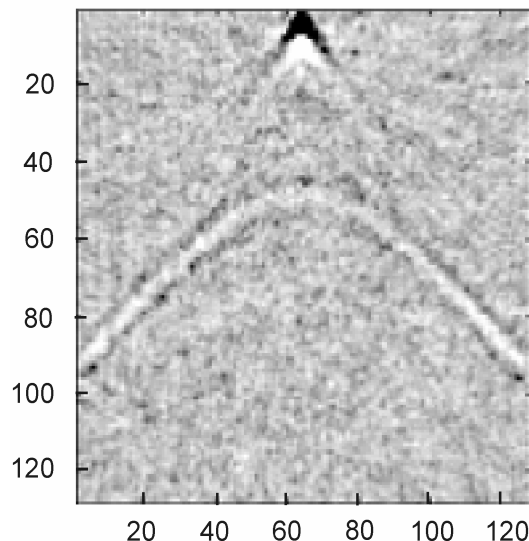


Рис. 8. Риджлет-фильтрация данных (см. рис. 6) на основе одномерного вейвлет-преобразования ($T_w=1/8$)

Будем выполнять основные численные эксперименты на фрагментах синтетической сейсмограммы, рассчитанной для модели горизонтально-слоистой среды¹⁰. Она содержит

¹⁰ Сейсмограмма получена средствами пакета учебных программ по сейсмозведке CREWES3.2

резко изменяющуюся динамическую картину – прямые волны от источника и ряд отраженных волн. Фрагмент сейсмограммы будет представлен матрицей размером 128 x 128 (рис. 5). Исходные данные были осложнены аддитивным нормально распределенным «шумом», величина которого пропорциональна среднеквадратическому отклонению (стандарту) двумерного массива данных. Коэффициент пропорциональности будем называть отношением сигнал/шум и обозначать на графиках сокращенно символами SNR (Signal to Noise Relation). Для анализа данных использован вейвлет «sym6»; T_w относительный порог для обнуления вейвлет-коэффициентов (истинный порог равен $T_w T$, где T – порог, выбираемый MatLab), T_R относительный порог для обнуления части Радон-коэффициентов (истинный порог равен $T_R \cdot \max_{t,\theta} |\tilde{f}(t,\theta)|$) На рис. 6 изображены исходные данные, осложненные случайной помехой SNR=1/4. Рис. 7 иллюстрирует результаты фильтрации данных, осложненных шумом, посредством использования преобразования Радона, а на рис. 8 – результат фильтрации тех же данных на основе риджлет-преобразования.

2. Практический пример. Проиллюстрируем работу риджлет-преобразования на практических данных ВРЭ ЗАО «НПЦ ГЕОНЕФТЕГАЗ». Размер матрицы исходных данных 1024x64 (рис. 9).

В процессе риджлет-преобразования использовалось одномерное быстрое вейвлет-преобразование с вейвлетом «sym6», порог усечения коэффициентов $T_w = T$, $lev = 4$. Отметим, что Радон-преобразование в процессе работы оперирует квадратными матрицами. Для выполнения глобального преобразования Радона нашей прямоугольной матрицы использовались перекрывающиеся квадратные окна 64x64. Их наложение составляло половину ширины окна, поэтому общее количество окон было равно 31.

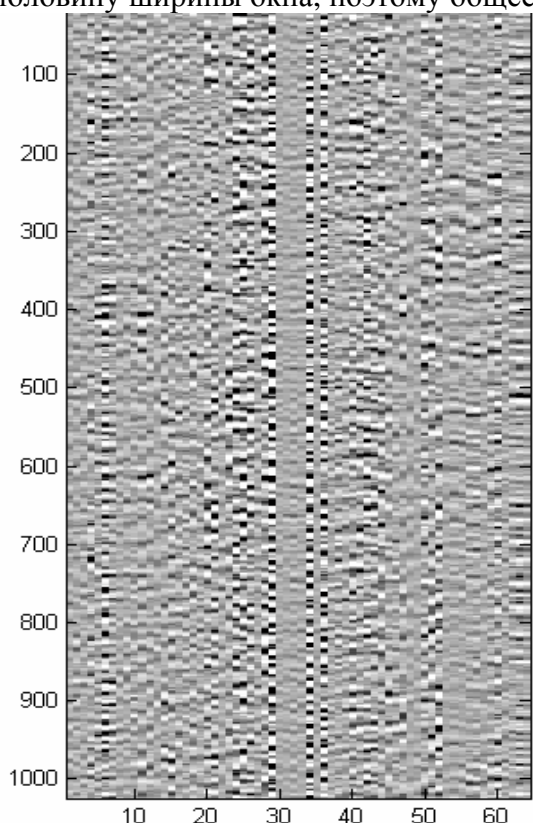


Рис. 9. Исходные площадные электроразведочные данные.

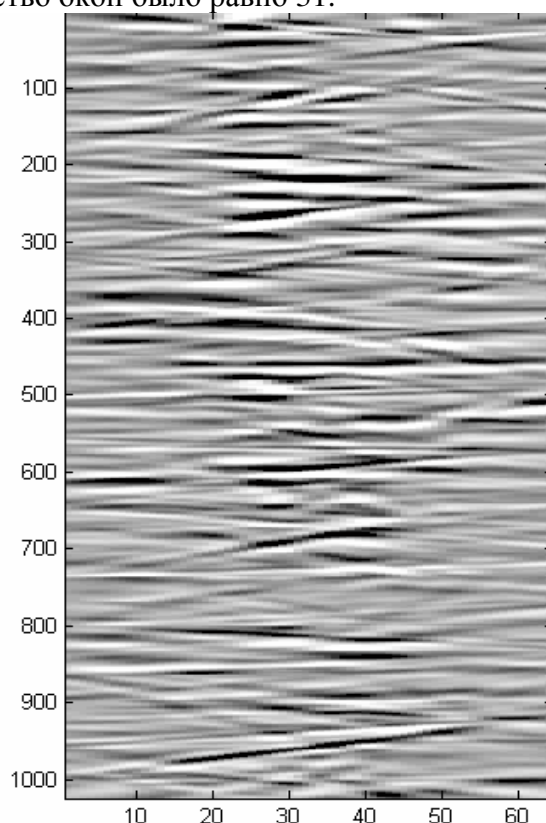


Рис. 10. Результат риджлет-фильтрации данных, изображенных на рис. 9.

Результаты риджлет-фильтрации полевых данных, изображенных на рис. 9, приведены на рис. 10. Элементы, выделенные фильтрацией, весьма слабо видны на исходных данных.

Примеры применения бимлет-анализа из-за ограничений на объем статьи мы не приводим. Соответствующую информацию можно получить в результате вычислений

посредством комплекса программ и данных к ним, которые открыты для доступа в Интернете по адресу <http://www.isye.gatech.edu/~beamlab/data/>.

По тем же соображениям не обсуждаются приложения вейвлетов для численного решения прямых задач геоэлектрики методом вейвлет-Галеркина [Юдин и др., 2002].

Выводы.

При соответствующей настройке параметров интегральных преобразований и выборе последовательности трансформаций можно существенно улучшать отношение сигнал/шум в анализируемых данных и выделить в них характерные особенности, представляющие интерес. Обоснованное совместное использование рассмотренных в работе интегральных трансформаций имеет большой потенциал при решении целого класса тонких задач, стоящих перед обработкой геолого-геофизической информации, которая, как правило, содержат высокий уровень помех геологического, технического и техногенного характера.

Литература.

1. *Averbuch A., Coifman R., Donoho D.L., Israeli M. and Walden J.* (2001). Fast Slant Stack: notion of Radon Transform for data on a Cartesian grid which is Rapidly Computable, Algebraically Exact, Geometrically Faithful, and Invertible. Technical Report, Department of Statistics, Stanford University, Stanford, CA 94305. May. Available: <http://www-stat.stanford.edu/~donoho/Reports/2001/> (файл FastSlantStack.pdf).
2. *Candès E.J., Donoho D.L.* Curvelets, [Online] Available: <http://www-stat.stanford.edu/~donoho/Reports/1999/>.
3. *Choi S., Donoho D.L., Flesia, A. G. Huo X., Levi O., Shi D.* About BeamLab – a Toolbox for New Multiscale Methodologies. Stanford University, Stanford, CA 94305 2 Georgia Institute of Technology, Atlanta, GA 30332. 7, 2002. Available: <http://www-stat.stanford.edu/~beamlab>.
4. *Deans S. R.* The Radon Transform and Some of Its Applications. New York: Wiley, 1983.
5. *Donoho D.L.* Orthonormal ridgelets and linear singularities, //SIAM J. Math Anal., vol. 31, no. 5, pp. 1062–1099, 2000.
6. *Donoho D.L. and Huo X.* (2001). Beamlets and Multiscale Image Processing. //In Multiscale and Multiresolution Methods. Eds T.J. Barth, T. Chan, and R. Haimes, Springer Lecture Notes in Computational Science and Engineering, Vol. 20, pp. 149-196.
7. *Goupilland P., Grossman A., Morlet J.* Cycle-octave and related transforms in seismic signal analysis // Geoexploration, 1984-1985, 23, 85-102.
8. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. М., Мир, 2001.
9. *Дьяконов В.П.* Вейвлеты. От теории к практике. СОЛОН-Пресс. М., 2004, 400 с.
10. *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии. М., Мир, 1990, 288
11. Сейсмическая томография. Под ред. Г.Нолета. М., Мир, 1990, 416 с.
12. *Смоленцев Н.К.* Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. ДМК.М., 2005, 304 с.
13. *Чуи К.* Введение в вейвлеты. М., Мир, 2001, 412 с.
14. *Юдин М.Н. Фарков Ю.А., Филатов Д.М.* Введение в вейвлет-анализ. М., МГГА, 2000, 72 с.
15. Дудова К.А., Юдин М.Н. Бимлет-преобразование. Новая форма кратномасштабного анализа. //VI Международная конференция «Новые идеи в науках о земле». Материалы докладов, том IV. М., МГГРУ, 2005.
16. Юдин М.Н., Юдин О.М.. Исследование возможности применения бимлет-преобразования, SVD-разложения и преобразования Радона для анализа данных сейсморазведки. //VI Международная конференция «Новые идеи в науках о земле». Материалы докладов, том 2, М., МГГРУ, 2005, с. 313.
17. Юдин М.Н., Калишенко Т. В., Юдин В.М. О применении вейвлет-преобразования и альтернирующего метода Шварца для решения некоторых задач геоэлектрики. «Новые идеи в науках о земле». Избранные доклады, М., МГГРУ, 2002, с.311-325.