Юдин М.Н., Калишенко Т.В., Юдин В.М.

О применении вейвлет-преобразования и альтернирующего метода Шварца для решения некоторых задач геоэлектрики[1]

Появление вейвлет-анализа является одним из важных событий, которые произошли в математике за последние полтора десятилетия. После возникновения сплайнов не было другой математической концепции, которая бы так стремительно проникла в естественные науки, многие области техники, экономику и финансы [4, 5, 7, 9-11]. Эта теория находит применение при численном решении задач математической физики [8, 10, 15-16]. Из-за близких подобий между *вейвлетами* (иногда их также называют *всплесками*) и конечными элементами кажется естественным использовать элементы ортонормированных вейвлет-базисов в качестве базисных функций проекционных методов приближенного решения задач (Ритца, Галеркина) [14]. Метод Галеркина, основанный на использовании всплесков в качестве функций полного в L^2 базиса, получил название *метода вейвлет-Галеркина* [6, 16]. Для этого метода будем далее использовать аббревиатуру *МВГ*.

Большинство задач геоэлектрики строго формулируются для неограниченных областей. При их численном решении возникает потребность рассмотрения краевых задач в ограниченной области. Аппроксимация поведения решения на бесконечности подходящим краевым условием является важной проблемой математического моделирования. В задачах с уравнениями эллиптического и параболического типа основой для построения краевых условий вместо условий на бесконечности может служить альтернирующий метод Шварца [12].

В статье будет обсуждаться применение МВГ для решения простых одномерных задач геоэлектрики применительно к уравнениям эллиптического и параболического типов на полупрямой. Аппроксимация искомого решения в конечной области будет строиться с помощью масштабирующих функций, а для построения граничного условия в процессе численного решения будет использоваться альтернирующий метод Шварца.

Тестовые задачи выбраны так, чтобы для них существовали аналитические решения. Это позволило оценивать погрешности численных решений. Результаты вычислений посредством МВГ сравнивались также с решениями по методу конечных разностей и конечных элементов.

1. Элементы теории дискретного вейвлет-преобразования.

Прежде чем перейти к решению задач, приведем некоторые сведения из теории вейвлет-анализа и определим основные понятия.

Кратноразрешающий анализ (КРА). В основе дискретного вейвлет-преобразования лежит так называемый *кратноразрешающий* или *кратномасштабный* анализ (*multiresolution analysis* или сокращенно *MRA*). Приведем связанные с этим понятием основные сведения.

Масштабирующие функции $\varphi(x)$ *и подпространства* V_j

Последовательность $\{V_j\}_{j\in Z}$ замкнутых подпространств в $L^2(R)$ называется *кратноразрешающим анализом*, если:

1^0. $V_j \subset V_{j+1}, \forall j \in Z$,

2^0. $\overline{\bigcup_{j\in \mathbf{Z}} V_j} = L^2(R)$,

[1] М., МГГА, Материалы международной конференции «Новое в науках о земле», М.,2002, с. 311-325..

3^0. $\bigcap_{j\in\mathbf{Z}} V_j = \{0\}$,

4^0. $f(\cdot)\in V_j \Leftrightarrow f(2\cdot)\in V_{j+1}$,

5^0. $f(\cdot)\in V_0 \Leftrightarrow f(\cdot-k)\in V_0 \quad \forall k\in Z$,

6^0. $\exists g\in V_0 : \{g(\cdot-k)\}_{k\in Z}$ – базис Рисса в пространстве V_0.

Свойство 6^0 можно заменить на

$6^{0\prime}$: $\exists\varphi\in V_0 : \{\varphi(\cdot-k)\}_{k\in Z}$ – ортонормированный базис (ОНБ) в пространстве V_0.

Функция $\varphi(\cdot)$ называется *масштабирующей функцией* (*scaling function*) КРА. Свойство 4^0 позволяет по одному подпространству V_0 построить все семейство $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$. Из 4^0 и $6^{0\prime}$ следует, что $\forall\, j\in\mathbf{Z}$ система функций $\{\varphi_{jk}(\cdot)\}$, где

$$\varphi_{jk}(\cdot):=2^{j/2}\varphi(2^j\cdot-k), k\in Z –$$

ОНБ в пространстве V_j. Поскольку $\varphi(\cdot)\in V_0$. и $V_0\subset V_1$, то для $\varphi(\cdot)$ справедливо разложение в ряд Фурье по системе $\{\varphi_{jk}(\cdot)\}$:

$$\varphi(x)=\sum_{k\in\mathbf{Z}} h_k\sqrt{2}\varphi(2x-k), \tag{1}$$

где

$$h_k=\langle\varphi,\varphi_{1k}\rangle=\sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\overline{\varphi(2x-k)}dx,\ k\in\mathbf{Z}. \tag{2}$$

Обозначив $c_k:=\sqrt{2}h_k$, формулу (1) можно переписать так: $\varphi(x)=\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k\varphi(2x-k)$. При выполнении условия нормировки

$$\int_R\varphi(t)dt=1$$

будет

$$\sum_k c_k=2.$$

Всплески $\psi(x)$ и подпространства W_j

Поскольку $V_0\subset V_1$, то разложим подпространство V_1 на прямую сумму: $V_1=V_0\oplus W_0$. Для любого $j\in Z$ определяем W_j как ортогональное дополнение V_j до V_{j+1}:

$$V_{j+1}=V_j\oplus W_j. \tag{3}$$

Подпространства W_j содержат *детализирующую информацию* (*detail information*) при переходе от разрешения уровня $j+1$ к j. В силу определения кратноразрешающего анализа и формулы (3) можно записать:

$$\bigoplus_{j\in\mathbf{Z}} W_j=\mathbf{L}^2(\mathbf{R}).$$

Теорема. *Для всякого КРА* $\{V_j\}_{j\in Z}$ *существует такой всплеск* $\psi(t)$, *что система* $\psi(\cdot-k)_{k\in Z}$ *– ОНБ в* W_0. *Более того, система функций* $\psi_{jk}(\cdot):=2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j\cdot-k)_{j\in Z}$ *является ОНБ в* $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$.

Поскольку ψ является элементом подпространства V_1, то существует числовая последовательность $\{g_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ такая, что

$$\psi(x)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}g_k\sqrt{2}\varphi(2x-k). \qquad (4)$$

Малла [13] показал, что один из возможных выборов последовательности $\{g_k\}_{k\in Z}$ в (4) является $g_k=(-1)^k h_{1-k}$.

2. Вейвлет-галеркинская аппроксимация функций

Кратноразрешающий анализ позволяет представить пространство $L^2(R)$) в виде:

$$\mathrm{L}^2(\mathbf{R})=V_{j_0}\oplus\sum_{j\ge j_0}W_j,\ j_0\in Z.$$

Следовательно, любая функция $f(x)$ из $L^2(R)$ может быть представлена в виде линейной комбинации сдвигов масштабирующей функции $\varphi(x)$ при некотором фиксированном масштабе j_0 и сдвигов всплесков $\psi(x)$:

$$f(x)=\sum_k \nu_{j_0k}\varphi_{j_0k}(x)+\sum_{j\ge j_0}\sum_k w_{jk}\psi_{jk}(x). \qquad (5)$$

Второе слагаемое в формуле (5) соответствует высокочастотным компонентам функции $f(x)$, которыми можно пренебречь в силу их незначительности (близости к нулю). Поэтому $f(x)$ может быть записана в виде так называемого “вейвлет-галеркинского разложения” (обозначим j_0 через N):

$$f(x)\approx\sum_k v_{Nk}\varphi_{Nk}(x) \qquad (6)$$

Предположим, что вейвлет $\psi(x)$ удовлетворяет условиям компактности, ортогональности, регулярности и симметричности[6].

Первые три условия определяют всплески Добеши (Daubechies) [4,5]. Условие регулярности говорит о полиномиальном содержании пространств V_j (т.е. масштабирующая функция регулярности *r* допускает точное представление полиномов степени *r* в пространствах V_j). Выполнение условия симметричности ведет к построению комплексных базисов.

Если все четыре условия выполняются, то в этом случае масштабирующая функция $\varphi(x)$ и ассоциированный с ней вейвлет $\psi(x)$ должны быть четными и нечетными соответственно относительно точек:

$$x_{jk}=2^{-j-1}+k2^{-j} \qquad (7)$$

Из свойства симметричности масштабирующей функции следует также формула:

$$\int_{-\infty}^{\infty}(x-\tfrac{1}{2})^k\overline{\varphi(x)}dx=0,\quad k=1,3,5,... \qquad (8)$$

Все это позволяет вычислить коэффициенты v_{Nk} в представлении (6). Выполняя разложение сигнала $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_{jk} и пользуясь формулой (7), а также учитывая вышеприведенные свойства, можно показать, что проекция $f(x)$ на подпространство V_N приводит к следующему выражению для коэффициентов:

$$v_{Nk} = \langle \varphi_{Nk}, f \rangle = 2^{N/2} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(2^N x - k)}\, f(x) dx \approx$$
$$\approx 2^{-N/2} \left[f(x_{Nk}) - i\gamma\, 2^{-(2N+1)} \frac{d^2 f(x_{Nk})}{dx^2} + \ldots \right],$$

где $\gamma \in R$ – коэффициент, зависящий от порядка вейвлета. Следуя определению КРА, можем записать [13]:

$$v_{j-1,k} = \sum_m \overline{h_m} v_{j,2k+m}, \qquad w_{j-1,k} = \sum_m \overline{g_m} v_{j,2k+m}. \tag{9}$$

Справедлива также формула обращения:

$$v_{j+1,k} = \sum_m h_{k-2m} v_{jm} + g_{k-2m} w_{jm}. \tag{10}$$

Рассмотрим аппроксимацию дифференциального оператора d^n/dx^n в терминологии кратноразрешающего анализа. В пространстве V_0 элементы матрицы дифференциального оператора имеют вид [2, 6]:

$$c_k^{(n)} = \left\langle \varphi_{0k}, \frac{d^n \varphi}{dx^n} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(x-k)} \frac{d^n \varphi(x)}{dx^n} dx \tag{11}$$

Посредством замены переменной получим (здесь $a_k := \frac{h_k}{\sqrt{2}}$):

$$c_k^{(n)} = 2^{n+1} \sum_{m=-2J}^{2J} \sum_{m'=-J}^{J+1} \overline{a}_{m+m'-2k} a_{m'} c_m^{(n)} \tag{12}$$

Здесь имеются в виду всплески Добеши, для которых $a_k \neq 0$ при *k = –J, –J+1, … , J, J+1*. Уравнение (12) может быть записано в матричной форме:

$$\mathbf{A}\mathbf{c}^{(n)} = \frac{1}{2^{n+1}} \mathbf{c}^{(n)},$$

где матрица **A** размера (4J+1) x (4J+1) – “матрица Лоутона” (Lawton) с элементами $A_{kk'}$, равными:

$$A_{kk'} = \sum_{m=-J}^{J+1} \overline{a}_{m+k'-2k} a_m \tag{13}$$

Следовательно, элементы матрицы для *n*-ной производной в пространстве V_0 являются компонентами собственного вектора матрицы **A**, соответствующие собственному значению $\lambda_n = 1/2^{n+1}$. Такой собственный вектор должен быть единственным. Для произвольного собственного вектора $\boldsymbol{r}^{(n)}$ коэффициенты $\boldsymbol{c}^{(n)}$ удовлетворяют равенству [2, 6]:

$$c_k^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{\sum_{l=-2J}^{2J} l^n r_l^{(n)}} r_k^{(n)} \tag{14}$$

Отметим, что этот результат однозначно определяет *n*-ную производную только для $n \leq J$.

3. Постановка и решение одномерных задач .

А. Уравнение эллиптического типа

Рассмотрим следующую краевую задачу для уравнения Гельмгольца :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2} - k^2u = 0, \\ u|_{x=0} = u_0,\, u|_{x\to\infty} = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Когда *k(x)* – кусочно-постоянная функция задача (15) имеет аналитическое решение. В более общем случае, когда *k(x)* – кусочно-непрерывна, решение находится численно. Для отыскания численного решения необходимо перейти к ограниченной области. В этом случае условие на бесконечности в (15) нужно заменить на подходящее краевое условие при некотором конечном $x = H$. В результате приходим к задаче:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2} - k^2u = 0, \\ u|_{x=0} = u^0, \quad u|_{x=H} = u^1. \end{cases} \quad (16)$$

Какой принять величину u_1 заранее неизвестно. Для построения граничного условия u_1 в точке $x = H$, воспользуется альтернирующим методом Шварца. С этой целью задачу (15) представим в виде согласованной совокупности двух подзадач в пересекающихся подобластях. В согласии с алгоритмом Шварца, на полупрямой рассмотрим две области (0,H) и (h,∞), где $(H > h)$. В каждой из них будем рассматривать решение следующих задач:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2v}{dx^2} - k^2v = 0, \\ v|_{x=0} = v_0, \quad v|_{x=H} = v_1 \end{cases} \quad (17) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2w}{dx^2} - k^2w = 0, \\ w|_{x=h} = w_0, \quad w|_{x\to\infty} = 0 \end{cases} \quad (18)$$

Будем считать, что для задачи (18) существует аналитическое решение $w(x)$. Его легко найти, если функция $k(x)$ кусочно-постоянна. Произвольно выбирая начальное приближение v_1, решаем задачу (17) численно. Алгоритм дальнейших вычислений состоит в последовательном выполнении двух основных шагов.

1. Решаем задачу (18) аналитически с краевым условием $w_0=v(h)$.

2. Численно решаем задачу (17) с граничным условием $v_1=w(H)$.

3. Если решение не установилось, переходим к шагу 1. В противном случае завершаем вычисления.

Таким образом, получается следующий итерационный процесс (i=1,2,…):

$$\begin{cases} \dfrac{d^2v^{(2i-1)}}{dx^2} - k^2v^{(2i-1)} = 0, \\ v^{(2i-1)}|_{x=0} = u_0, \\ v^{(2i-1)}|_{x=H} = w^{(2i-2)}(H) \end{cases} \quad (19) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2w^{(2i)}}{dx^2} - k^2w^{(2i)} = 0, \\ w^{(2i)}|_{x=h} = v^{(2i-1)}(h), \qquad i=1,2\ldots \\ w^{(2i)}|_{x\to\infty} = 0 \end{cases} \quad (20)$$

Процесс построения краевого условия при $x=H$ иллюстрирует рис.1. На нем точное решение показано сплошной линией. Сначала граничное значение взято равным 2. Приближения к решению на различных шагах итерационного процесса изображены пунктирными линиями.

На рисунке видно, что последовательность $w^{(2k)}(H)$, k = 1,2,… быстро сходится к истинному граничному значению.

Можно показать [12], что последовательности приближенных решений $v^{(m)}(x), w^{(m)}(x)$ при $m \to \infty$ в соответствующих областях сходятся к решению задачи (15) .

Рассмотрим более подробно вычисления по методу вейвлет-Галеркина. Напомним, что в согласии с этим методом искомую функцию приближенно представляюn в виде линейной комбинации полной системы базисных функций $\varphi_1,...,\varphi_n$:

$$u_n(x) \approx b_1\varphi_1(x) + ... + b_n\varphi_n(x),$$

где коэффициенты $b_1, b_2, \dots, b_n$ для некоторого линейного оператора L находятся из системы

$$(Lu_n, \varphi_j) = \sum_{k=1}^{n} b_k (L\varphi_k, \varphi_j) = 0, \quad (j=1,2,\dots,n). \qquad (21)$$

В нашем случае L – дифференциальный оператор.

В простейшем варианте метода вейвлет-Галеркина в качестве базисных функций берут систему масштабирующих функций $\varphi(x)$ КРА в пространстве V_0. Мы ограничимся рассмотрением только этого случая. График одной из этого набора функций представлен на рис.2.

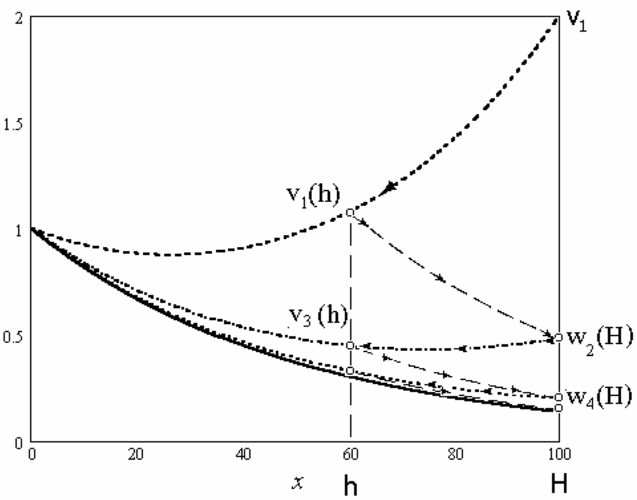

Рис.1. Иллюстрация построения краевого условия в точке x=H по алгоритму Шварца.

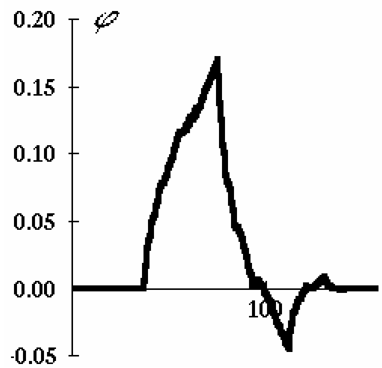

Рис.2. Масштабирующая функция Daub4

Рассмотрим аппроксимацию второй производной дифференциального оператора (15). Разобьём отрезок [0, H] с постоянным шагом h и функции $u(x)$ поставим в соответствие сеточную функцию $u_{m.}=u(x_m)$, m = 1,2,…,N. Согласно [2,6], дифференциальный оператор d^2u/dx^2 в каждой фиксированной точке x_m в базисе пространства V_0 может быть аппроксимирован посредством некоторого «шаблона». При этом количество ненулевых коэффициентов «шаблона» зависит от порядка p вейвлета и равно $4p$+1. Например, для p = 2 (вейвлет типа Daub4) система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных значений искомой функции будет представлена девятидиагональной симметричной матрицей, коэффициенты которой определяются по формулам (11), (12) при n равным 2. Система сеточных уравнений для задачи (17) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} c_0 - k_1^2 h^2 & c_1 & \dots & c_4 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & c_0 - k_2^2 h^2 & c_1 & \dots & c_4 & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & \\ 0 \dots 0 & c_4 \dots & c_1 & c_0 - k_m^2 h^2 & \dots & c_4 & \\ \dots & & & & & & \\ 0 & 0 & c_4 & \dots & c_1 & c_0 - k_{N-2}^2 h^2 & c_1 \\ 0 & \dots & 0 & c_4 & \dots & c_1 & c_0 - k_{N-1}^2 h^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \dots \\ u_m \\ \dots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \\ \dots \\ b_{N-2} \\ b_{N-1} \end{pmatrix} \quad (22)$$

В этой системе принято обозначение $c_k^{(2)} \equiv c_k$, $k = 1,2,3,4$, $\tilde{u}_m$ - фиктивные узлы (m = -3,-2.-1,N+1, N+2, N+3), $u^1 = u_N$ - граничное значение при $x = H$ и

$b_1 := -c_4\tilde{u}_{-3} - c_3\tilde{u}_{-2} - c_2\tilde{u}_{-1}. - c_1 u^0$, $\quad b_{N-1} := -c_4\tilde{u}_{N+3} - c_3\tilde{u}_{N+2} - c_2\tilde{u}_{N+1}. - c_1 u_N$,

$b_2 := -c_4\tilde{u}_{-2} - c_3\tilde{u}_{-1} - c_2 u^0$, $\quad b_{N-2} := -c_4\tilde{u}_{N+2} - c_3\tilde{u}_{N+1} - c_2 u_N$,

$b_3 := -c_4\tilde{u}_{-1} - c_3 u^0$, $\quad b_{N-3} := -c_4\tilde{u}_{N+1} - c_3 u_N$,

$b_4 := -c_4 u^0$, $\quad b_{N-4} := -c_4 u_N$,

$b_5 = \dots b_{N-5} = 0$.

Числовые значения коэффициентов $c_k^{(2)}$ можно найти в работах [2, 6].

Аппроксимация второй производной по пространственной координате посредством вейвлетов приводит к неоднозначности аппроксимации краевых условий Дирихле в нескольких узлах сетки, примыкающих к границам. Количество этих узлов зависит от типа вейвлета, используемого для построения приближенного решения. Например, при p = 2 появляется потребность доопределения искомой функции в 3-х фиктивных узлах на каждой границе. На рис. 3 показаны эти узлы только вблизи границы x = 0. Существуют различные способы экстраполяции решения вне области (0, H) (периодическое продолжение, зеркальное отражение). Однако для решения задач геоэлектрики они неприемлемы. Для решения этой проблемы был выбран алгоритм, основанный на анализе результатов численных экспериментов. В согласии с ним значения в фиктивных узлах итерационно доопределяется посредством нечётного продолжения некоторого приближенного решения задачи относительно граничной точки (рис. 3). Вычисления показали, что достаточно задачу решать дважды. Сначала значения во всех фиктивных узлах строили по аналитическому решению, полученному для постоянных усредненных значений коэффициента $k(x)$. С этими данными находили численное решения задачи и экстраполировали его в фиктивные узлы по указанному выше правилу. Для границ x= 0 и x = H соответственно доопределение можно описать формулами

$$u(-x) = 2u(0) - u(x), \qquad u(H + x) = 2u(H) - u(H - x), \; x > 0.$$

Окончательный результат получали после повторного решения задачи.

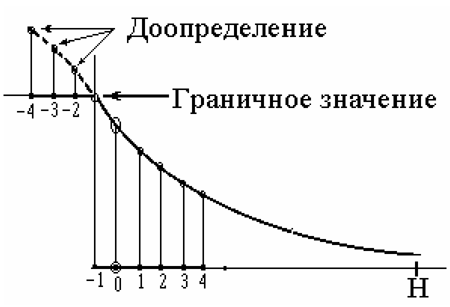

Рис.3. К доопределению искомой фукнции в фиктивных узлах

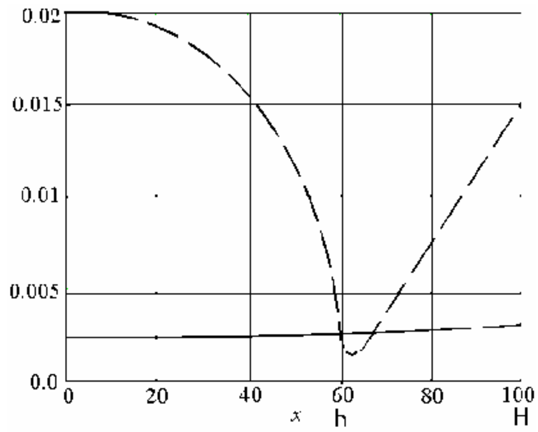

Рис.5. График относительной погрешности: пунктир - метод конечных разностей, непрерывная – метод вейвлет-Галеркин.

Б. Уравнение параболического типа.

Задача заключается в отыскании решения одномерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (23)$$

удовлетворяющего краевым

$$u(t,0) = u_0, \quad u(t,\infty) = 0 \quad (24)$$

и начальным условиям

$$u\big|_{t=0} = g(x) = \begin{cases} u_0, & x = 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases} \quad (25)$$

Эта задача имеет аналитическое решение, выражающееся через функцию ошибок $erfc(\cdot)$,

$$u(x,t) = u_0 erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right), \qquad erfc(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha . \quad (26)$$

Рассмотрим ее численное решение методом вейвлет-Галеркина.

Будем использовать обычную неявную схему. При аппроксимации второй производной по пространственной переменной воспользуемся результатом, полученным при решении эллиптической задачи. Сразу выпишем сеточную аппроксимацию дифференциального оператора

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = \frac{1}{h^2} \sum_{m=-4}^{4} c_m u_{i+m}^{j+1}, \; c_{-m} = c_m .$$

Здесь τ - шаг по времени, j–номер временного слоя (изменяется от *1* до N_t). Индекс i соответствует номеру узла по пространственной координате (принимает значения от 1 до N_x).

Переход с одного временного слоя на другой сопряжен с решением системы линейных алгебраических уравнений с девятидиагональной матрицей.

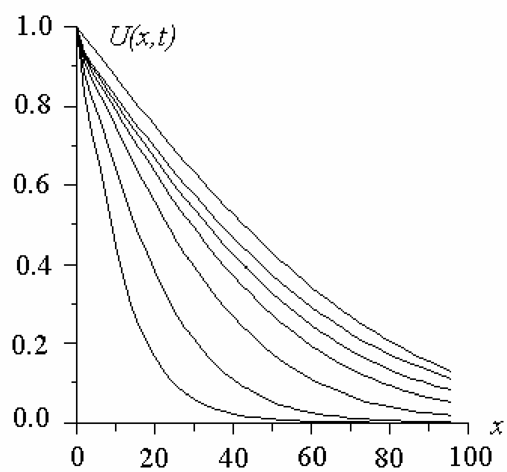

Рис.6. Графики решения параболической задачи методом вейвлет-Галеркина для разных времен.

Решение задачи (23-25) для некоторого набора времен приведено на рис. 6. Визуально численное решение совпадает с аналитическим. Сопоставление решения, полученного посредством МВГ, с аналитическим и решением по методу конечных разностей дают тот же характер погрешностей, что и при решении краевой задачи для уравнения Гельмгольца (рис.5).

Применение альтернирующего метода Щварца для построения краевых условий в процессе решения параболических задачах несколько сложнее, чем в задачах с уравнениями эллиптического типа. Коррекция граничных значений требует применения процедуры свертки и многократного решения задачи при переходе с одного временного слоя на другой. Поясним это на аналитическом решении задачи (23-25), получаемом по алгоритму Шварца путем последовательного решения двух задач в налегающих областях.

Применим к задаче (23-25) преобразование Лапласа по времени

$$\hat{u}(x,p) := L[u](x,p) = \int_0^\infty u(x,t)e^{-pt}dt\,.$$

В результате в области изображений получим задачу

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\hat{u}(x,p)}{dx^2} = -p\hat{u}(x,p), \\ \hat{u}(0,p) = u_0, \;\; \hat{u} \to 0, \quad x \to \infty. \end{cases} \tag{27}$$

Пусть решением задачи (27) в области изображений является функция

$$\hat{u}(x,p) = u_0 \hat{f}(x,p),$$

а ее оригиналом

$$u(x,t) = L^{-1}[\hat{u}(x,p)] = u_0 f(x,t).$$

В задаче(23)-(25) и (27) эти функции имеют вид

$$f(x,t) = erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right), \quad \hat{f}(x,p) = \frac{e^{-x\sqrt{p}}}{p}$$

В области изображений решение дают формулы (26).

Перейдем к обсуждению алгоритма Шварца. На паре интервалов (0, *H*) и (*h*, ∞) по аналогии с задачами (18)-(19) получим следующие решения.

1. Зададим произвольно при *x* = *H* граничное значение, равное *a*. На интервале (0, *H*) получим

$$\hat{u}^{(0)}(x,p) = u_0\hat{q}_1(x,p) + a\hat{q}_2(x,p),$$

$$\hat{q}_1(x,p) := \frac{sh[\sqrt{p}(H-x)]}{sh(\sqrt{p}H)}, \hat{q}_2(x,p) := \frac{sh(\sqrt{p}x)}{sh(\sqrt{p}H)} \cdot$$

Примем

$$q_j(x,t) := L^{-1}[\hat{q}_m(x,p)], \quad j = 1,2.$$

Тогда области оригиналов найдем

$$u^{(0)}(x,t) = u_0 q_1(x,t) + a q_2(x,t).$$

2. На бесконечном интервале $x > h$ с учетом решений $\hat{u}^{(0)}(x,p)$ и $u^{(0)}(x,t)$ получим

$$\hat{u}^{(2m+1)}(x,p) = \hat{u}^{(2m)}(h,p)\hat{f}((x-h),p), \quad m = 0,1,...$$

Из операционного исчисления известно, что

$$L^{-1}[\hat{g}_1(p)\hat{g}_2(p)] = (g_1 * g_2)(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t g_1(t-\tau)g_2(\tau)d\tau$$

С учетом этой формулы для любого фиксированного x найдем оригинал

$$u^{(2m+1)}(x,t) = u^{(2m)}(h,t) * f(x-h,t).$$

На границе $x = H$ получим

$$u^{(2m+1)}(H,t) = u^{(2m)}(h,t) * f(H-h,t). \quad (28)$$

3. Далее на интервале $(0, H)$ имеем решение

$$\hat{u}^{(2m)}(x,p) = u_0\hat{q}_1(x,p) + \hat{u}^{(2m-1)}(H,p)\hat{q}_2(x,p), \; m = 1,2\ldots$$

Применяя теорему свертки, вычислим оригинал

$$u^{(2m)}(x,t) = u_0 q_1(x,t) + u^{(2m-1)}(H,t) * q_2(x,t), \; m = 1,2\ldots$$

В частности, полагая в последней формуле $x = h$, найдем

$$u^{(2m)}(h,t) = u_0 q_1(h,t) + u^{(2m-1)}(H,t) * q_2(h,t). \quad (29)$$

В реальных задачах на интервале $(0,H)$ задача будет решаться численно. При этом для итерационного построения краевого условия в точке $x = H$ нужно пользоваться дискретным аналогом формулы (28).

Выводы.

1. Использование вейвлетов позволяет построить эффективные устойчивые вычислительные схемы и получать высокую точность численного решения на относительно редкой сетке.
2. Вейвлеты служат естественной основой для построения вычислений на последовательности сеток, выбор которых диктуется алгоритмом кратноразрешающего анализа [6].
3. Применение альтернирующего метода Шварца для построения граничных значений в процессе получения численного решения задач с уравнениями эллиптического и параболического типов позволяет существенно уменьшить размеры матрицы системы сеточных уравнений за счет сокращения размеров области, в которой задача решается численно.
4. Достоинство алгоритма Шварца состоит также в том, что он дает возможность сделать декомпозицию сложной задачи на ряд более простых подзадач, решение каждой из которых может выполняться автономно. На этом пути появляется возможность построить серию алгоритмов параллельных вычислений на мультипроцессорных компьютерах.
5. МВГ в сочетании с альтернирующим методом Шварца являются мощным инструментом для решения задач математической физики в неограниченных областях.

6. Рассмотренные в работе алгоритмы решения задач с очевидными изменениями обобщаются на аналогичные задачи для уравнений эллиптического и параболического типов с большим числом независимых переменных.

Литература.

1. Beylkin G., Coifman R., and Rokhlin V. Fast wavelet transforms and numerical algorithms, Pure Appl. Math. **44** (1991), 141-183.
2. Beylkin G.On wavelet based algorithms for solving differential equations. Benedetto J., and Frazier M. (eds.) Wavelets: Mathematics and Applications, CRC Press, Boca Raton, 1993, pp.449-466.
3. Dahmen W., Kurdila A. J., and Oswald P. (eds.), Multiscale Wavelets Methods for Partial Differential Equations. San Diego, Calif.:Academic Press, 1997.
4. Daubechies I. Ten Lectures on Wavelets. SIAM, Philadelphia, 1992.
5. Daubechies I. Orthonormal Bases of compactly supported wavelets. Comm. PureAppl. Math., 41, 1988, pp. 909-996.
6. Gagnon L. and Lina J.M. Symmetric Daubechies' wavelets and numerical solutions of NLS2 equations. J. Phys.A: Math. Gen. 27, 1994, pp. 8207-8230.
7. Goswami J.C., Chan A.K. Fundamentals on Wavelets. (Theory, Algorithms, and Applications). A Wiley-Interscience Publication. New York, 1999.
8. Glowinsky R., Lawton W.M., Ravachol M., and Tenenbaum E. Wavelet solution of linear and nonlinear elliptic, parabolic, and hyperbolic problems in one space dimension, in Computing Methods in Applied Science and Engineering, Glowinsky R and Lichnewsky A. (eds.), Philadelphia: SIAM, 1990, pp.55-120.
9. Jawerth B. and Swedlens W. An Owerview of wavelet based multiresolution analyses. SIAM Review. Vol.36, pp. 377-412, 1994.
10. Kaiser G. A Friendly guide to wavelets. Birkhauser. ISBN G-8176-3711-7, Boston, 1994.
11. Kölzow D. Wavelets. A Tutorial and a Bibliography, Erlangen, 1994.
12. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. Физматгиз, 1962.
13. Mallat S. Multiresolution approximation and wavelets. Trans. Amer. Math. Soc. 315, 1989, pp. 69-88.
14. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. М., Наука, 1981.
15. Resnikoff H. L., Wells R.O. Wavelet Analysis. Springer, 1991.
16. Xu J., and Shann W. Galerkin-wavelet methods for two point value problems, Numer.Math.**63**, pp. 123-144, 1992.