МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

Редколлегия журнала “Известия высших учебных заведений”, раздел “Геология и разведка”

УДК 550.837:518

№ 1949-81 Деп.

Юдин М.Н.

# СОВМЕСТНОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА СЕТОК И ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В ПРЯМЫХ ЗАДАЧАХ ГЕОЭЛЕКТРИКИ

**Москва – 1981**

Решение прямых задач геоэлектрики методом сеток в неограниченных областях затруднено как на этапе математической постановки задачи, так и при ее последующей численной реализации. Для вычисления на ЭВМ бесконечная область заменяется областью ограниченных размеров в предположении, что изучаемая неоднородность геоэлектрического разреза также ограничена (финитна). Для задания краевых условий на границе области необходимо отодвинуть ее от аномалиеобразующего объекта на такое достаточно большое расстояние, чтобы вторичное поле было существенно м*еньше* первичного ("нормального") поля.

В ряде работ (см., например, [3] ) для уменьшения размеров пространственной области предлагается использовать асимптотические краевые условия. Однако и в этом случае большая часть ячеек сетки будет принадлежать областям, решение в которых, как правило, не представляет большого практического интереса, что приводит к потере точности сеточного решения.

Применение интегральных трансформаций по пространственным координатам дает возможность сочетать достоинства сеточной методики и учесть поведение поля за пределами финитной области, занятой неоднородностью.

Пусть начало прямоугольной системы координат совпадает с границей раздела земля-воздух. Ось z направим вниз. Амплитуды полей **E** и **H** изменяются во времени по закону $e^{-i\omega t}$.

I. Д В УМ Е Р Н Ы Й  С Л У Ч А Й.

Пусть на границу раздела земля-воздух падает плоская однородная монохроматическая волна, вектор электрического поля **E** которой имеет одну ненулевую компоненту $E_x$.
Свойства среды по оси $x$ остаются без изменения. Если .магнитная проницаемость μ всюду постоянна, то поведение компоненты $E_x$ в двумерно-неоднородной среде описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = k^2 E_x, \qquad (1)$$

где $k$ – волновое число среды. На поверхности разрыва параметров среды должны быть непрерывны $E_x$ и $\partial E_x / \partial n$, где **n** - - нормаль к поверхности. Кроме того, необходимо задать условие излучения на бесконечности, например, в форме предельного поглощения [1].
Будем предполагать, что локальная двумерная неоднородность находится в горизонтально-однородной слоистой среде с волновым числом $k_0(z)$ , зависящим только от одной координаты z.
Для дальнейшего изложения целесообразно перейти от рассмотрения полного поля к анализу аномальной его части $E_x^a(y,z)$, определяемой как разность полного и нормального $E_x^0(z)$ полей:

$$E_x^a(y,z) = E_x(y,z) - E_x^0(z) .$$

Подставляя (2) в (1), получим:

$$\frac{\partial^2 E_x^a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x^a}{\partial z^2} = k^2 E_x^a + \left(k^2 - k_0^2\right) E_x^0 \qquad (3)$$

Аномальное поле убывает на бесконечности по $y$ как $O(y^{-2})$ и ограничено, поэтому можно к уравнению (3) применить преобразование Фурье

$$\Phi(\alpha) := F(f) := \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\alpha y} dy \qquad (4)$$

Введем обозначения:

$$U(\alpha, z) := F\left(E_x^a\right); \qquad S(\alpha, z) := F\left(k^2 - k_0^2\right)$$

тогда в области изображений уравнение (3) будет иметь вид:

$$\frac{d^2 \mathrm{U}(\alpha, z)}{dz^2} = \left(k^2 + \alpha^2\right) \mathrm{U}(\alpha, z) + \varphi(\alpha, z), \qquad (5)$$

где

$$\varphi(\alpha, z) = \frac{1}{2\pi} S(\alpha, z) * U(\alpha, z) + E_x^0 S(\alpha, z). \qquad (6)$$

Таким образом, (5) является интегро-дифференциальным уравнением относительно функции $U(\alpha, z)$. Хотя величину $E_x$ можно найти непосредственно путем решения уравнения (5), мы рассмотрим иной путь, позволяющий соединить сеточное решение с интегральными трансформациями.

Пусть неоднородность содержится в прямоугольной области

$$D_1 = \left\{(y, z) \in R^2 \mid y_a \le y \le y_b; z_c \le z \le z_c\right\}.$$

рассмотрим также область $D_2 \supset D_1$

$$D_2 = \left\{(y, z) \in R^2 \mid y_a - h_1 \le y \le y_b + h_2; z_c - h_3 \le z \le z_c + h_4\right\}.$$



ЛИТЕРАТУРА.


1. Дмитриев В.И.. Электромагнитные поля в неоднородных средах. Труды ВЦ МГУ. М., 1969.
2. Дмитриев В.И., Кокотушкин Г.А. Альбом палеток для магнитотеллурического зондирования в неоднородных средах. Изд-во .МГУ, 1971.
3. Жданов М.С., Варенцов И.М., Голубев Н.Г. Обобщенные краевое условия в двумерных задачах геоэлектрики. ИЗМИРАН, препринт №35(301). М., 1980.
4. Юдин М.Н.. Расчет магнитотеллурических полей по методу сеток в трехмерной неоднородной среде. В сб. "Проблемы морских электромагнитных исследований". М., ИЗМИРАН, 1980.

Оценку возможности последовательного использования сеточного и спектрального решений выполним на простейшем примере. Пусть на поверхности земли известно значение поля **E**. Тогда для компонент поля $E_x(x,y,z)$ и $E_x(x,y,z)$ в области z < 0 с нулевой проводимостью решение задача Дирихле имеет вид

$$E_\gamma(x,y,z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_\gamma(\xi,\zeta,0)}{R^3} d\xi d\zeta, \qquad (18)$$

где $\gamma = x, y$; $R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}$.

В нижнем полупространстве $z > H$ с волновым числом $k_n$ имеем

$$E_\gamma(x,y,z) = \frac{z-H}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_\gamma(\xi,\zeta,H)}{R^3}(1+k_n R)e^{-k_n R} d\xi d\zeta. \quad (19)$$

Если в основании модели геоэлектрического разреза имеется горизонтально-однородный пласт с нулевой проводимостью (изолятор), то внутри пласта σ = 0

$$E_\gamma(x,y,z) = E_\gamma(x,y,\bar z) * F_2^{-1}\left\{\frac{sh\left[\sqrt{\alpha^2+\beta^2}(z-\bar z)\right]}{sh\left[\sqrt{\alpha^2+\beta^2}(H-\bar z)\right]}\right\}. \quad (20)$$

С помощью соотношений (18-20) итерационный процесс строится также, как в случае Е-поляризации.

Отметим, что использование спектральных представлений уменьшает трудности, связанные с пересчетом полей **E** в поля **H** [4], так как в области изображений образы производных можно взять аналитически и затем найти от них: обратное преобразование Фурье.



где $h_1 > 0, h_2 > 0, h_3 > 0, h_4 > 0$. Произведем дискретизацию этой области по осям y и z

$$\Omega = \{(y_i, z_j) \in D_2 \mid i = \overline{1, N_y};\ j = \overline{1, N_z}\}.$$

Выбирая подходящие краевые условия, после замены дифференциального уравнения разностным получим систему разностных уравнений:, которую будем решать по методу Зейделя. Если величины $h_i, i = \overline{1,4}$ велики, то значения функции U , являющейся разностным аналогом компоненты $E_X$, могут быть вычислены по методу конечных разностей без использования интегральных трансформаций. Однако мы будем считать, что граница Г области $D_2$ расположена достаточно близко от неоднородности и аномальные значения поля на ней: сравнимы с первичным полем. В первом грубом приближении можем положить $U|_{\Gamma(\Omega)} = 0$ и сделать одну или несколько итераций с целью решения системы разностных уравнений. В результате найдем приближенные значения поля $E_x$. во внутренних узлах сетки Ω и используем их для расчета первого приближения к функции $\varphi(\alpha, z)$ по соотношению (7). что позволит проинтегрировать уравнения (5)-численно или аналитически. При аналитическом решении для $z \in [z_c, z_d]$ уравнение (5) решается вариацией:: произвольных постоянных

$$U(\alpha, z) = A_i e^{-R_i z} + B_i e^{R_i z} + \delta_i,$$

где

$$\delta_i(z)=\frac{1}{R_i}\int\limits_{z_{i-1}}^{z} sh\left[R_i(\varsigma-z)\right]\varphi(\alpha,z)d\varsigma .$$

Здесь $R_i=\sqrt{\alpha^2+k_i^2}$ $i$ - номер слоя нормального разреза

Коэффициенты Ai; и $B_i$ находятся на необходимом наборе с использованием условий сопряжения

$$[U]=0,\left[\partial U/\partial z\right]=0$$

и поведения аномального поля при $z\to\infty$. Применяя преобразование Фурье к функции $U(\alpha,z)$, имеем возможность найти приближенные значения $E_X(y,z)$ при любых значениях y и z, в том числе на границе области $D_2$ в узлах сетки $\Omega$. Это дает возможность сделать очередной итерационный цикл по изложенному алгоритму.

Сходимость последовательных приближений не очевидна и требует специального рассмотрения.

Мы провели численные эксперименты на ЭВМ *для* простейшей ситуации, представляющей самостоятельный интерес. Мы положили

$$z_c=0;\ z_d=H=\sum_{i=1}^{n-1}H_i ,$$

где n – количество слоев нормального разреза, $H_i$ - их мощности. Боковые границы области $D_2$ взяли на достаточно большом расстоянии от неоднородности как в традиционной сеточной методике расчета применительно к Е-поляризации. Верхнюю и нижнюю границу сеточной области $D_2$ выбрали на прямых z = –h и z = H + h, где h - шаг сетки по оси z. Если предположить, что значения



В горизонтально- однородных пластах $\mathbf{F}_i=\mathbf{0}$.

Решение уравнения (16) имеет вид

$$\mathbf{e}_i=\mathbf{A}_i e^{-R_i z}+\mathbf{B}_i e^{R_i z}+\overline{\ }_i, \qquad (17)$$

где $\mathbf{A}_i,\mathbf{B}_i$ коэффициенты, подлежащие определению,

$$\mathbf{\Delta}_i(z)=\frac{1}{R_i}\int\limits_{z_{i-1}}^{z} sh\left[R_i(z-\varsigma)\right]\boldsymbol{\psi}_i(\alpha,\beta,\zeta)d\zeta .$$

Соотношения (17) совместно с условиями сопряжения на границах разрыва свойств и условием на бесконечности дают возможность найти функцию **e** всюду, если известна в области, занятой трехмерной неоднородностью, вектор-функция **F**.

Однако вектор **E**, входящий в выражение для **F** является решением задачи, поэтому точное его значение заранее не известно. Приближенное значение поля **E** можно найти по методу сеток [4]. После ‘того представляется возможным вычислить функцию **e** и, следовательно, приближенное значение вектора **E** в любой точке пространства. Для уточнения решения рассчитаем поле **E** только на границе суженной сеточной области, существенно приближенной к неоднородности. Это позволяет уменьшить шаги сетки при том же количестве узлов и выполнить повторные расчеты функции **E** в узлах сетки. Подобные уточнения необходимо продолжить до тех пор, пока не установится построенный итерационный процесс. После завершения итераций рассчитываются компоненты полей **E** и **H** на поверхности земли и в нужных узлах.

Доказательство сходимости итерационного процесса требует дополнительных исследований.

Техника двумерного преобразования Фурье достаточно хорошо отработана.

Источники аномального поля отлична от нуля только в тех точках пространства, где проводимость трехмерно-неоднородного разреза отлична от проводимости нормального разреза.

В однородных по проводимости областях уравнение (13) упрощается

$$\Delta\mathbf{E}_a = k_0^2\mathbf{E}_a + \mathbf{f}. \qquad (14)$$

К уравнениям (13)-(14) нужно добавить условия сопряжения на границах: разрыва свойств среды и условия на бесконечности.

Применяя двумерное преобразование Фурье по x и y

$$\Phi(\alpha,\beta,z) := F_2(\varphi) := \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,y,z)e^{-i\alpha x - i\alpha y}dxdy \qquad (15$$

к равнению (13), получим

$$\frac{d^2\mathbf{e}_i(\alpha,\beta,z)}{dz^2} = \left(k^2+\alpha^2\right)\mathbf{e}_i(\alpha,\beta,z) + {}_i(\alpha,\beta,z),, \qquad (16)$$

где

$$\mathbf{e}_i = F_2(\mathbf{E}_a),\quad {}_i = \left(\psi_{ix},\psi_{iy},\psi_{iz}\right),\; R_i = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+k_i^2}$$

i - номер пласта нормального разреза,

$$\psi_{ix} = \frac{1}{k_i^2}\left[i\alpha\frac{dF_{iz}}{dz} + \left(k_i^2+\alpha^2\right)F_{ix} + \alpha\beta F_{iy}\right],$$

$$\psi_{iy} = \frac{1}{k_i^2}\left[i\alpha\frac{dF_{iz}}{dz} + \left(k_i^2+\beta^2\right)F_{iy} + \alpha\beta F_{ix}\right],$$

$$\psi_{iz} = F_{iz} + \frac{1}{k_i^2}\frac{d}{dz}\left[i\alpha F_{ix} + i\beta F_{iy} - \frac{dF_{iz}}{dz}\right].$$

Здесь $\mathbf{F}_i = F_2(\mathbf{f}_i)$, $\mathbf{F}_i = \left(F_{ix},F_{iy},F_{iz}\right)$.



$E_X(y,z)$ на уровнях z = 0 и z = H известны и равны соответственно $\varphi(y) = E_x^a(y,0)$ и $\psi(y) = E_x^a(y,H)$, то в воздухе ($k_0 = 0,\ z<0$) можем записать

$$E_x^a(y,0) = -\frac{z}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\eta)}{r^2}d\eta, \qquad (8)$$

$r^2 = (y-\eta)^2 + z$ .

В нижнем полупространстве с волновым числом $k_n = 0$ поле может быть рассчитано по соотношению типа (8) с очевидными изменениями. Если же при z > *H n*роводимость основания отлична от нуля, то значения поля $E_x^a$ могут быть продолжены вниз по соотношению

$$E_x^a(y,z+H) = \frac{k_n z}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(\eta)}{r}K_1(k_n r)d\eta, \qquad (9)$$

$K_1(\cdot)$ - функция Макдональда.

Ясно, что перед расчетами функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ не известны. Вместо них использовали результаты расчетов по методу сеток функции $E_x^a(y,0)$ и $E_x^a(y,H)$, получающиеся *в* процессе расчетов очередных приближений к решениям системы разностных уравнений. На каждой итерации корректировали граничные значения на верхней и нижней границах: сетки посредством соотношений (8-9). Вычисления свидетельствуют о сходимости итерационного процесса и об удовлетворительной точности получаемых результатов.

Большинство моделей из альбомов типа [2], изданных в МГУ, содержат неоднородности в верхней части разреза (горсты, грабены, вставки), а нижняя часть его представляет собой мощный изолирующий пласт, подстилаемый на глубине H идеальным проводником. Внутри горизонтально-однородного слоя изолятора ( $H-h \le z < H$ ) поле может быть пересчитано с уровня $\overline{z}$ на уровень z > $\overline{z}$ посредством свертки $E_x$ и функции

$$Q(y,z,\overline{z}) = \frac{1}{4(H-h)}\left(ctg\zeta + ctg\overline{\zeta}\right),$$

где

$$\zeta = \frac{1}{2(H-z)}\left[(z-\overline{z})+iy\right]$$

и $\overline{\zeta}$ комплексно сопряжено $\zeta$ :

$E_x^a(y,z) = E_x^a(y,\overline{z}) * Q(y,z,\overline{z})$.

Последнее соотношение использовалось для уточнения значения поля на нижней границе сетки, которая находилась в изоляторе на расстоянии одного цата сетки от нижнего края двумерной неоднородности типа "горст" [2]. При сеточных расчетах использовалось 7 шагов сетки по оси z и 40 –по оси y. Полученные нами графики практически совпадают с кривыми из альбома [2].

## II.-Т Р Е Х М Е Р Н Ы Й С Л У Ч А Й.

Рассмотрел обсуждаемую проблему в пространственном случае применительно к вектору напряженности электрического поля $\mathbf{E}(x,y,z)$. Пусть $\mathbf{E}(x,y,z)$ и $\mathbf{H}(x,y,z)$ - суть напряженности электрического и магнитного полей в трехмерно-неоднородной среде, а $\mathbf{E}_0(x,y,z)$ и $\mathbf{H}_0(x,y,z)$ – нормальные поля, соответствуйте горизонтально-однородной слоистой среде ("нормальному" разрезу). Без учета токов смещения уравнения Максвелла могут быть записаны в виде



$$\begin{cases} rot\mathbf{H} = \sigma(x,y,z)\mathbf{E} + \mathbf{j}_s, \\ rot\mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H} \end{cases} \qquad (10)$$

и

$$\begin{cases} rot\mathbf{H}_0 = \sigma_0(z)\mathbf{E}_0 + \mathbf{j}_s, \\ rot\mathbf{E}_0 = i\omega\mu\mathbf{H}_0 \end{cases} \qquad (11)$$

где $\sigma_0(z)$- проводимость нормального разреза, $\mathbf{j}_s$ – плотность сторонних источников электрического поля. Вычитая (11) из (10), получим:

$$\begin{cases} rot(\mathbf{H}-\mathbf{H}_0) = \sigma\mathbf{E} - \sigma_0\mathbf{E}_{0s}, \\ rot(\mathbf{E}-\mathbf{E}_0) = i\omega\mu(\mathbf{H}-\mathbf{H}_0) \end{cases} \qquad (12)$$

Введем обозначения

$$\mathbf{E}_a = \mathbf{E} - \mathbf{E}_0,$$
$$\mathbf{H}_a = \mathbf{H} - \mathbf{H}_0,$$
$$\mathbf{f} = (k^2 - k_0^2)\mathbf{E}.$$

В дальнейшем изложении будем полагать, что магнитная проницаемость среды $\mu$ постоянна и равна магнитной проницаемости воздуха $\mu_0$.

Исключая из (12) $\mathbf{H}_a$, получим

$$\Delta\mathbf{E}_a - grad\, div\mathbf{E}_a = k_0^2\mathbf{E}_a + \mathbf{f}. \qquad (13)$$