

ВАРИАЦИОННЫЕ ПОДХОДЫ К ОБРАБОТКЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ, ОСЛОЖНЕННЫХ ШУМОМ

М.Н.Юдин¹, О.М. Юдин²

¹Российский государственный геологоразведочный университет, Москва, Россия. ²ОАО НПО «НАФТАКОМ», Москва, Россия

Реальные экспериментальные данные, как правило, осложнены шумом. Примем, что в наблюдаемых данных z полезный сигнал u осложнен аддитивной помехой ε : $z = u + \varepsilon$. Задача состоит в реконструкции u из осложненных шумом данных z . Проблема улучшения соотношения сигнал/шум является актуальной задачей. Часто для ее решения используют сглаживание посредством сплайнов, фильтрацию на основе Фурье-анализа и им подобные классические методы.

В современной математической обработке двумерных (многомерных) данных имеется два основных подхода. Один из них базируется на недавно развитом вычислительном гармоническом анализе (Computational Harmonic Analysis – CHA) (вейвлеты, вейвлет-пакеты, риджлеты, курвлеты и т.п.) [Малла, 2005; Candès, Guo, 2001]. Второй подход основан на уравнениях в частных производных (Partial Differential Equations – PDE) и минимизации связанных с ними функционалов. Оба направления базируются на понятии многомасштабного анализа (multi-scale analysis) (MSA).

Доклад посвящен обсуждению PDE-алгоритмов с позиций улучшения соотношения сигнал/помеха в экспериментальных данных, а также сопоставлению двух подходов, анализу их достоинств и недостатков.

Обзор основных результатов и направления развития PDE-алгоритмов дан в работах [Morel и Solimin 1995; Scherzer, 1997]. Существует мнение, что методы, основанные на PDE, гораздо лучше CHA-методов при восстановлении резких изменений в данных, осложненных шумом. Osher и его коллеги методы PDE противопоставляют алгоритмам CHA, аргументируя это тем, что применение вычислительного гармонического анализа ведет к появлению осцилляций вблизи разрывов, хотя сигнал может быть плоским по обе стороны от линии разрыва. Они трактуют этот феномен как явление «псевдо-Гиббса». По мнению E.J. Candès и F.Guo [Candès, Guo, 2001], в этом случае более подходящим является термин «эффект боковой полосы частот» («side-band effect»).

В публикациях предложены различные варианты генерации многомасштабного анализа. Основой общего метода его построения является диффузионный процесс, описываемый задачей Коши для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \nabla \cdot (k(x, u) \nabla u(x, t)), t > 0; u(x, 0) = u_0^\delta(x), x \in \mathbb{R}^2, \quad (1)$$

где ∇ – оператор Гамильтона, $k(\cdot)$ – коэффициент диффузии.

Если $k \equiv 1$, то решением задачи (1) (для уравнения теплопроводности) является функция

$$u(x, t) = (G_t * u_0^\delta)(x), G_t(x) = \exp(-|x|^2 / 4t) / 4\pi t,$$

посредством которой можно построить MSA. С этой целью полагают $u_\lambda(x) := u(\cdot, \lambda)$. MSA состоит в генерации последовательности упрощенных все более грубых версий u_λ начальных данных u_0^δ , когда параметр λ увеличивается. Очевидно, $u_\lambda \rightarrow u_0^\delta$, при $\lambda \rightarrow 0$. Последовательность $u_\lambda(x)$ имеет тенденцию к сверхсглаживанию. Желательно сконструировать диффузионный процесс, который обладал бы свойствами строгой причинной связи u_λ при разных значениях параметра λ , обеспечивал реконструкцию резких изменений начальных данных и устранение осцилляций, связанных с шумом в изображении. Такие задачи сформулированы. Они описываются уравнением вида (1), правая часть которого представлена нелинейным дифференциальным выражением вида

$$\nabla \cdot (f(|\nabla u|) \nabla u)(x, t),$$

где $|\cdot|$ – эвклидова норма в \mathbb{R}^2 , $f(\cdot)$ – гладкая невозрастающая функция, удовлетворяющая условиям

$$f(0) = 1, f(s) \geq 0, \lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 0.$$

Osher и Rudin [1990] предложили нелинейный диффузионный процесс для выделения контуров с резким изменением сигнала:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \nabla \cdot \left(\frac{1}{|\nabla u|} \nabla u \right)(x, t). \quad (2)$$

Функционал энергии, связанный с этим процессом, имеет вид

$$E(u) \equiv TV(u) := \int_{\Omega} |\nabla u| dx.$$

Его называют полной вариацией сигнала (Total Variation или сокращенно – TV).

Многие практические применения многомасштабной обработки изображения могут быть охарактеризованы в терминах вариационного исчисления как решение задачи на отыскание минимума функционалов (включая неограниченные дифференциальные операторы).

В основополагающей статье [Rudin, Osher и Fatemi, 1992] авторы предложили решать задачу минимизации с ограничениями

$$\min_u TV(u), \text{ если } \|u - z\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sigma^2, \quad (3)$$

где параметр σ определяет величину ε в данных, которая предполагается известной; Ω – ограниченная область ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$), $z \equiv u_0^\delta$.

Предпочтительнее вместо задачи (3) с ограничениями сформулировать экстремальную задачу без ограничений

$$\min_u \frac{1}{2} \|u - z\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda^2 TV(u), \quad (4)$$

где $\lambda^2 > 0$ параметр, который контролирует компромисс между качеством согласования данных и изменениями u . В обратных некорректно поставленных задачах этот алгоритм известен как метод регуляризации Тихонова.

Обычно функционал $TV(u)$ заменяют его гладкой аппроксимацией $J(u)$

$$J(u) := \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla u|^2 + \beta^2} dx \quad (5)$$

и затем применяют стандартные алгоритмы оптимизации (метод градиентного спуска или метод Ньютона). В (5) β – положительный параметр.

В работе [Vogel, Oman, 1996] предложен итерационный алгоритм, основанный на минимизации функционала

$$f(u) = \frac{1}{2} \|u - z\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda^2 J(u). \quad (6)$$

Ему соответствует уравнения Эйлера-Лагранжа

$$u = \lambda^2 \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{|\nabla u|^2 + \beta^2}} \right) = z, \quad x \in \Omega, \quad (7)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = 0. \quad (8)$$

В операторной записи уравнение (7) может быть записано в виде

$$(I + \lambda^2 L(u))u = z, \quad (9)$$

где

$$L(u)v := -\nabla \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{|\nabla u|^2 + \beta^2}} \nabla v \right). \quad (10)$$

Для фиксированного номера итерации n имеем

$$u^{n+1} = (I + \lambda^2 L(u^n))^{-1} z, \quad n = 0, 1, \dots \quad (11)$$

При численной реализации алгоритма (11) на каждой итерации требуется обращать дискретный аналог положительного симметричного линейного дифференциального оператора $I + \lambda^2 L(u^n)$. Детали этого алгоритма обсуждаются в большом числе публикаций.

Приведем некоторые результаты расчетов, заимствованные из статей.

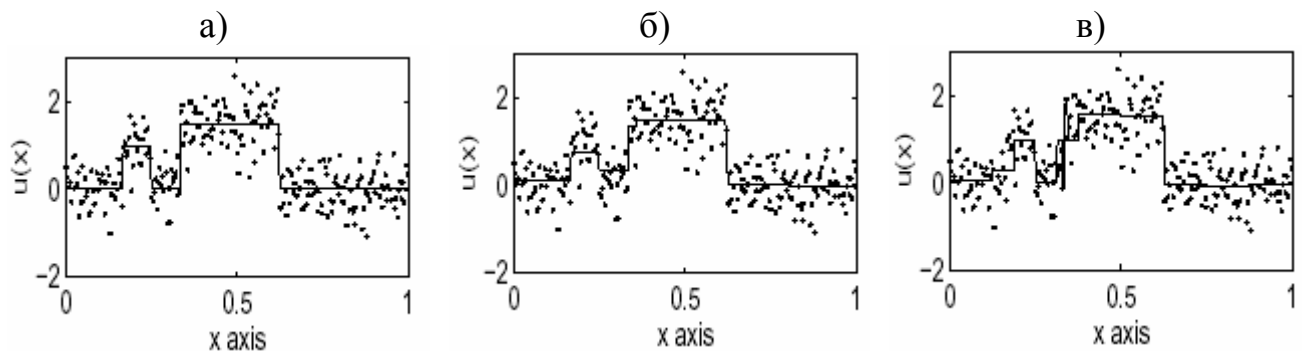
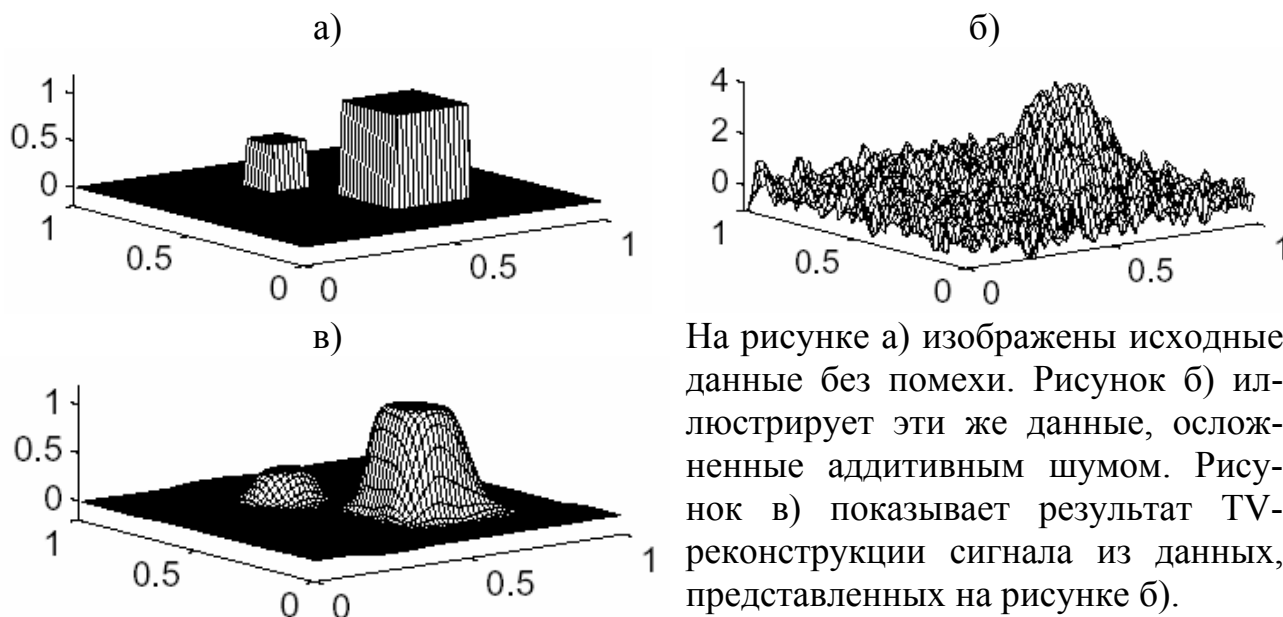


Рис.1. Точками изображены данные с шумом; сплошной линией на рис. а) изображены точные данные, на рис. б) и в) – сигнал, восстановленный посредством TV-алгоритма и вейвлет-фильтрации на основе вейвлета Хаара.

Численное сравнение различных алгоритмов «очистки» одномерных данных от шума приведены на рис.1 [Vogel, Oman, 1996]. Здесь видим, что TV-

алгоритм лучше решает задачу восстановления сигнала, чем фильтрация посредством вейвлета, форма хорошо которого согласована с точными данными.



На рисунке а) изображены исходные данные без помехи. Рисунок б) иллюстрирует эти же данные, осложненные аддитивным шумом. Рисунок в) показывает результат TV-реконструкции сигнала из данных, представленных на рисунке б).

Рис.2. Иллюстрация работы TV-алгоритма на тестовых данных, осложненных шумом. Рисунки взяты из работы [Oman, 1995].

На рис. 2в в восстановленном сигнале (на границах резкого его изменения) отсутствуют осцилляции, в то время как применение СНА-алгоритма для решения этой же задачи привело бы к появлению колебаний вблизи линий разрывов. Этот феномен (явление «псевдо-Гиббса») хорошо виден на рис. 1в и проявляется в виде «дребезга» в окрестности точек разрыва.

В работе [Candès,Gou, 2001] обсуждается совместное применение методов СНА и PDE и приводятся результаты численных экспериментов.

Литература

1. Candès E.J., Gou F. Minimum Total Variation Synthesis: Application to Edge-Preserving Image Reconstruction. Dec. 2001.
2. Morel J.-M., Solimini S. Variational methods in image segmentation. Vol.14 of Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. Birkhauser, Basel, 1995.
3. Oman M.E. Fast multi-grid techniques in total variation-based image reconstruction. 1995. Available: <http://citeseer.ist.psu.edu/oman95fast.html>.
4. Rudin L.J., Osher S., Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. Physica D, vol.60 (1992), pp.259-268.
5. Scherzer O. Stable evaluation of differential operators and linear and nonlinear multi-scale filtering. Electronic J. of Differential Equations, Vol 1997(1997), No.15, pp 1-12. Available: <http://ejde.math.swt.edu> or <http://ejde.math.unt.edu>.
6. Vogel C.R., Oman M.E. Iterative methods for total variation denoising. SIAM J. Sci. Comput., 17: 227-238, 1996. Available: <http://math.montana.edu:80/~vogel>.
7. Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов. М., Мир, 2005, 671 с.